SUITE DES

MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE.

Tirez des Regiſtres

DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES,

DE L'ANNÉE M. DCCIX.

A AMSTERDAM,

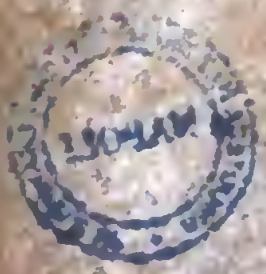
Chez PIERRE DE COUP, Marchand Libraire, dans le Kalverſtraat.

M. DCCXI.

Avec Privilege de N. S. les Etats de Hollande & de Weſt-Friſe.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

Ce Titre doit être placé au devant de la Page 233 des Memoires.



SUITE DES MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE.

TIREZ DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences,

De l'Année M. DCCIX.

FORMULES GENERALES

Pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté ſous des angles égaux.

PAR M. DE REAUMUR.

* JE lûs le 4 Mai un Memoire dans lequel je démontrai une Méthode pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites indéfiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque, vers le même

* 4. Juin 1709.

côté, ſous des angles égaux moindres ou plus grands qu'un droit. J'exceptois ainſi l'angle droit, parce que mon deſſein étoit de donner ſeulement des choſes nouvelles, & que de célebres Géometres ont trouvé pluſieurs Formules très-commodes pour déterminer la longueur des raions oſculateurs, ou, ce qui eſt la même choſe, pour avoir le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe ſous un angle droit. Je me ſervis de leurs découvertes pour arriver à ce que je cherchois; je ſuppoſai leurs Formules pour donner la mienne; mais le juſte goût où l'on eſt à preſent pour les généralitez, & la facilité qu'on a d'y parvenir avec le ſecours des nouvelles Méthodes, firent que le R. P. *Gouye* propoſa de réſoudre ce Problême univerſellement ſans en excepter l'angle droit, & ſans ſuppoſer les Formules déja trouvées. Voici une des manieres dont on le peut faire.

PROBLÊME.

Une Courbe quelconque AMmG *étant donnée, il faut trouver le point d'interſection* N *des droites* Fm, fm, *infiniment proches qui font avec cette Courbe vers le même côté les angles* FMA, fmA *égaux, ſans rien ſuppoſer de conſtant que ces angles.*

SOLUTION.

Soient menées les ordonnées infiniment proches *BM*, *Bm* de la Courbe *AMmG*, qu'on ſuppoſe ici concourir au point *B*; & de ce point

point ſoient tirées les perpendiculaires *BF*, *Bf*, ſur *FM*, *fm*: la 2e de ces perpendiculaires *Bf*, *M* coupera *FM* en *I*. Soient enfin abaiſſées les

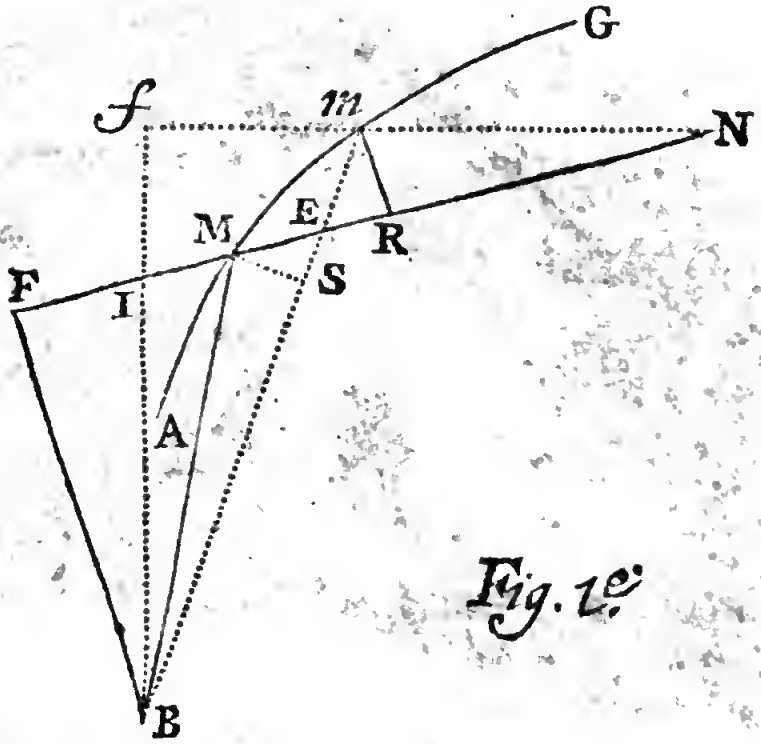


Fig. 1e

perpendiculaires *mR* (*fig.* 1.) ſur *MN*, *MS* ſur *Bm*, & (*fig.* 2.) *MR* ſur *mN*, *MS* ſur *Bm*. La ſeule vûë des figures fait appercevoir deux cas differens. 1°, ou les droites *FM*, *fm*, (*fig.* 1.) font avec la partie convexe de la Courbe les angles *FMA*, *fmA* plus petits que les angles *BMG*, *BmG*: 2°, ou (*fig.* 2.) les droites *FM*, *fm* font avec la partie convexe de la Courbe les angles *AMT*, *Amt* plus grands que les angles *BMG*, *BmG*. Il eſt évident que dans le 1r cas (*fig.* 1.) le point d'interſection *N* ſera placé par delà *BM* par raport à *A*; & dans le 2d cas (*fig.* 2.) ce même point ſera entre *AM*

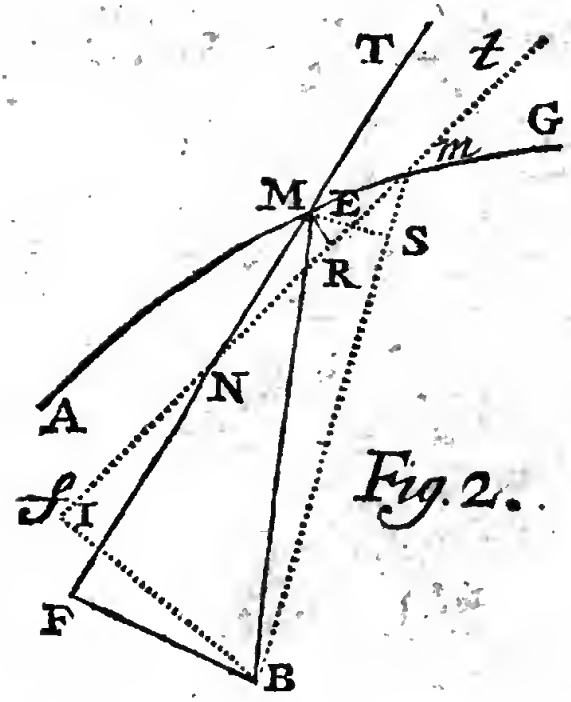


Fig. 2.

& *BM*; ce qui apporte quelque changement aux figures. C'eſt-pourquoi je conſidererai les deux cas ſéparement.

Cas 1. On nommera le ſinus de l'angle donné (*fig.* 1) *mMR*, *n*; celui de l'angle *MmR* (qui eſt donné auſſi, l'angle *mRM* étant droit) *m*; le ſinus total, ou de l'angle droit *mRM*, *a*; *MN*, ou *mN*, *z*; *BM*, ou *Bm*, *y*; *Mm*, *ds*; *mS*, *dy*; *MS*, *dx*; *ME*, *du*; *ES*, *dt*: D'où on aura $MR = \frac{mds}{a}$, en faiſant *a*. *m* :: *ds* (*Mm*). *MR*; & par un ſemblable raiſonnement $mR = \frac{nds}{a}$; par conſéquent $ER = MR - ME = \frac{mds}{a} - du$; $Em = mS - ES = dy - dt$. Les triangles rectangles ſemblables *MES*, *mER*, don-

donnent les analogies ſuivantes $ME\ (du)$. $ES\ (dt) :: Em.\ (dy - dt)$. $ER\left(\frac{mds}{a} - du\right)$; d'où on tire (après avoir ſubſtitué pour du^2 ſa valeur $dt^2 + dx^2$) $dt = \frac{mds\,du - a\,dx^2}{ady}$, & $mR\left(\frac{nds}{a}\right)$. $Em\ (dy - dt) :: MS\ (dx)$. $ME\ (du)$, ce qui donne $dt = \frac{ady\,dx - nds\,du}{adx}$; or comparant ces deux valeurs de dt, on en tire $du = \frac{adx\,dy^2 + adx^3}{mdx\,ds + nds\,dy} = (a$-près avoir ſubſtitué pour dx^2 ſa valeur $ds^2 - dy^2)$ $\frac{adx\,ds}{mdx + ndy}$: & ſubſtituant cette valeur de du en une des précedentes de dt, on aura (les operations neceſſaires étant faites) $dt = \frac{mdx\,dy - ndx^2}{mdx + ndy}$. Il eſt de plus viſible que les triangles rectangles MBF, MES, ſont ſemblables ; car ſi des angles SEM, EMS, égaux à un droit, & des angles BMF, EMS pareillement égaux à un droit, on ôte le même angle EMS, les angles reſtans SEM, BMF ſont auſſi égaux. On a donc les analogies ſuivantes : $ME\left(du = \frac{adx\,ds}{mdx + ndy}\right)$. $ES\left(dt = \frac{mdx\,dy - ndx^2}{mdx + ndy}\right) :: BM\ (y)$. $FM = \frac{mydy - nydx}{ads}$; & $ME\left(\frac{adx\,ds}{mdx + ndy}\right)$. $MS\ (dx) :: BM\ (y)$. $BF = \frac{mydx + nydy}{ads}$. Si on prend à preſent la difference de BF, en regardant toutes les quantitez comme variables, on au-

ra la valeur de . . . . . .

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2};$$

mais on a enfin (à cauſe des triangles ſemblables)

$$IfN, NmR, NI = MN + MF = z\,\frac{+mydy - nydx}{ads}.$$

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2} ::$$

$Nm\,(z).\ mR = \frac{nds}{a}$; d'où l'on tire . . .

$$z\,(MN) = \frac{mnydyds^2 - nnydxds^2}{amydsddx + anydsddy - amydxdds - andsdx^2 - anydydds + amdsdxdy}$$

après avoir ſubſtitué dans le dénominateur de la fraction pour ds^2, ſa valeur $dx^2 + dy^2$. Si on multiplie à preſent le haut & le bas de la fraction qui exprime la valeur de $z\,(MN)$ par $\frac{ndx}{mndy - nndx}$, on la changera en celle-ci: $z =$

$$\frac{nydxds^2}{amnydsdxddx + annydsdxddy - amnydx^2dds - annddx^3ds - annydxdydds + amndx^2dsdy}$$

$$\frac{}{mndy - nndx}$$

après quoi ſubſtituant pour $dxddx$, ſa valeur $dsdds - dyddy$, & dans le terme où l'on trouvera ds^2 (après cette operation) mettant ſa valeur $dx^2 + dy^2$, le dénominateur de cette fraction ſe réduira (la diviſion qui devient par-là poſſible étant faite) à $aydydds - aydsddy + adsdx^2$, par conſéquent on aura $z = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$.

Ce qu'il falloit trouver.

2. *Cas.* Un chemin aſſez ſemblable à celui qu'on a ſuivi dans le cas précedent, conduira à trouver la même Formule pour déterminer

le

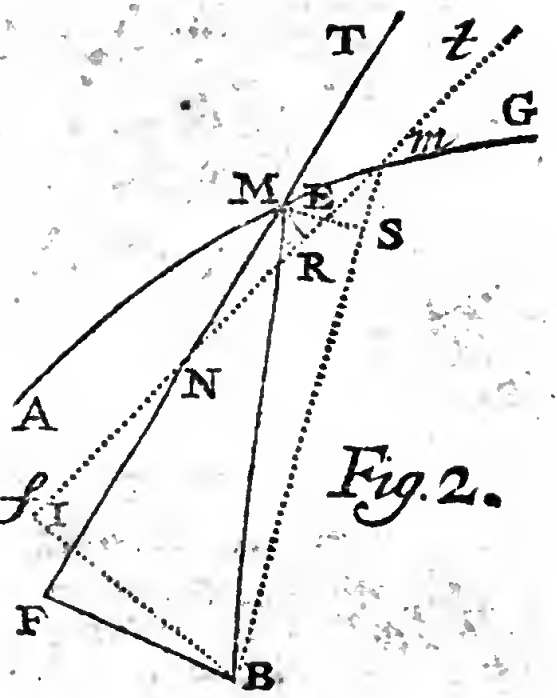


Fig. 2.

le point d'interſection N ; mais on nommera dans ce cas ci le ſinus de l'angle MmR, n, (*fig.* 2.) parce qu'il repréſente le ſinus de l'angle mMR de la fig. 1re, & le ſinus de mMR, ſera nommé m ; on nommera de plus mE, du ; ES, dt ; & le reſte comme dans le cas précedent ; ainſi on aura $MR = \frac{nds}{a}$; $mR = \frac{mds}{a}$; $RE = mR - mE = \frac{mds}{a} - du$; $ME = MS - ES = dx - dt$. Les triangles rectangles ſemblables MER, mES, donnent encore ici ces deux analogies : $mE\,(du)$. $ES\,(dt) :: ME\,(dx-dt)$. $ER\left(\frac{mds}{a} - du\right)$; & $MR\left(\frac{nds}{a}\right)$. $ME\,(dx-dt) :: mS\,(dy)$. $mE\,(du)$. On tire de la 1re (après avoir ſubſti-

tué pour dt^2 sa valeur $du^2 - dy^2$) $dt = \frac{mds\,du - ady^2}{adx}$; & de la 2e, $dt = \frac{adx\,dy - nds\,du}{ady}$. Or la comparaison de ces deux valeurs de dt, en fournit une de $du = \frac{ady\,ds}{mdy + ndx}$, & substituant cette valeur de du en une de celles de dt, on trouve $dt = \frac{mdx\,dy - ndy^2}{mdy + ndx}$. Il sera à present aisé d'avoir les expressions algébriques de FM, BF, & fI difference de BF, par le moien des triangles rectangles semblables mES, MBF. Après quoi faisant de la proportion que donnent les secteurs fNI, MNR, une égalité, on en tirera comme dans le cas précedent une valeur de $MN(z)$, & des préparations semblables à celles du même cas précedent, rendront aussi cette valeur la même qu'on a trouvée ci-dessus; car on aura $z\,(MN) = \frac{nydx\,ds^2}{ads\,dx^2 + aydy\,dds - aydx\,ddy}$.

COROLLAIRE I.

Si dans la Formule générale des points d'intersection $z = \frac{nydx\,ds^2}{ads\,dx^2 + aydy\,dds - aydx\,ddy}$, on substituë en la place de dds sa valeur $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{ds}$, & après cette substitution on met dans le terme du dénominateur où l'on trouvera ds^2 sa valeur $dx^2 + dy^2$, cette 1re Formule se changera en une 2e $z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx - aydxddy}$. Ou si l'on substituë dans la 1re Formule la valeur de

de $ddy = \frac{dsdds - dxddx}{dy}$, & en la place de dy^2 (que cette ſubſtitution fera trouver dans le dénominat.) $ds^2 - dx^2$, on aura une 3e Formule $z = \frac{nydyds^2}{adydxds + aydsddx - aydxdds}$.

COROLLAIRE II.

Lorſque les droites FM, fm, feront avec la Courbe $AMmG$ des angles droits, l'angle mMR (*fig.* 1.) deviendra égal à l'angle mRM, & (*fig.* 2.) l'angle MmR auſſi égal à l'angle mRM; de ſorte que le ſinus n de ces angles ſera alors égal au ſinus total a. Ce qui changera les trois expreſſions précedentes en celles-ci :

1re. $z = \frac{ydxds^2}{adx^2 + ydyddx - ydsddy}$:

2e. $z = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$:

3e. $z = \frac{ydyds^2}{aydxds + ydsddx - ydxdds}$: qui ſont autant de Formules du raion de la Développée. Ce ſont auſſi celles que M. *Varignon* a démontrées dans les Memoires de 1701, pag. 32, & dans ceux de 1706, pag. 654, de tant de manieres très-differentes, mais encore plus ingenieuſes. M. *Varignon* a auſſi trouvé les trois Formules du Corollaire précedent par des chemins differens de celui que je viens de donner; mais comme il attend une autre occaſion pour les faire connoître au public, j'ai crû devoir montrer celui que j'ai ſuivi pour y arriver.

COROLLAIRE III.

Il ſuit du Corollaire précedent, que ſi on nomme le raion de la developée, r, on aura

1°. $r = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydyddx - ydsddy}$:

2°. $r = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$:

3°. $r = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$.

Si l'on ſubſtitue r dans les Formules 1re, 2e, & 3e, en la place de ſa 1re, 2e, & 3e valeur (*Corol.* 1.) ces trois Formules ſe changeront en celle-ci $z = \frac{nr}{a}$, qui eſt auſſi celle que j'ai démontrée le 4 Mai, avec cette ſeule difference que je nommai alors m, ce qui eſt ici appellé n, & que je mis dans la Formule en la place de a ſa valeur $\sqrt{mm + nn}$.

COROLLAIRE IV.

Le point de concours B, des ordonnées

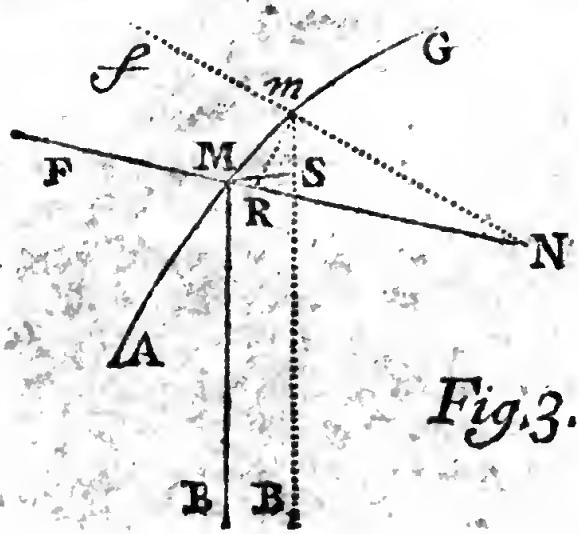


Fig. 3.

BM,

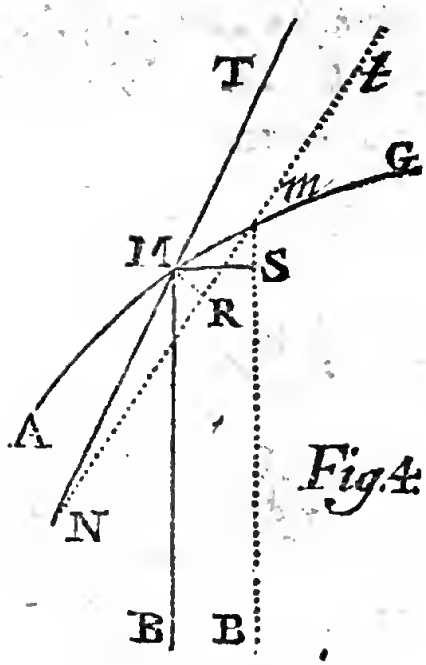


Fig. 4.

BM, Bm, étant pris infiniment éloigné de la Courbe $AMmG$, ces ordonnées deviendront alors paralleles, & tous les termes qui ne ſont pas multipliez par y (BM) dans les Formules du Corol. 1. s'évanouïſſant, ces trois Formules ſe changeront en celles-ci:

1re, $z = \frac{ndxds^2}{adyddx - adxddy}$: 2e, $z = \frac{nds^3}{adyddx - adxddy}$:

3e, $z = \frac{ndyds^2}{dsddx - dxdds}$: Ces trois Formules ſerviront à déterminer le point d'interſection N des droites FM, fm, dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles.

COROLLAIRE V.

Les Formules des Coroll. 1 & 4, deviendront plus ſimples dans l'application; car on ſera obligé alors de regarder la difference d'une des variables comme conſtante: d'où il arrivera que la difference 2e de cette variable ſera zero. En faiſant ces differentes ſuppoſitions on changera les 3 Formules du Corol. 1, dans les ſix qu'on voit ci-deſſus dans la 1re colonne; comme auſſi dans les ſix autres qu'on voit dans l'autre colonne les trois du 4 Corol.

Formules qui naiſſent de celles du Corollaire 1.	*Formules qui naiſſent de celles du Corollaire* 4.
ds conſtante, ou $dds = 0$.	
$z = \frac{nydxds}{adsdx - aydds}$.	$z = \frac{ndxds}{-addy}$.
$z = \frac{nydyds}{adydx + aydds}$.	$z = \frac{ndyds}{addx}$.
dy conſtante, ou $ddy = 0$.	
$z = \frac{nydxds^2}{adxds^2 + aydyds}$.	$z = \frac{ndxds^2}{adyds}$.
$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx}$.	$z = \frac{nds^3}{adyddx}$.
dx conſtante, ou $ddx = 0$.	
$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydxddy}$.	$z = \frac{nds^3}{-adxddy}$.
$z = \frac{nydyds^2}{adydxds - aydxdds}$.	$z = \frac{ndyds^2}{-adxdds}$.

On alongeroit inutilement ce Memoire ſi l'on appliquoit ici ces Formules génerales à des cas particuliers. Il n'eſt beſoin pour cela que de calcul. Comme il arriveroit même qu'on troûveroit toûjours l'expreſſion du raion oſculateur multipliée par la fraction conſtante $\frac{n}{a}$, il eſt auſſi commode dans les cas particuliers de chercher d'abord ce raion, après quoi on déterminera aiſément le point d'interſection *N*, en ſuivant la méthode du Corollaire 2, art. 1, du 4 Mai. Je ne repeterai pas non plus ici ces choſes qu'on trouve dans les Corollaires du même Memoire, quoiqu'on en pût déduire la plus grande partie de cette derniere Solution.

DES

DES MOUVEMENS

Primitivement variez dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrez des viteſſes effectives de ces mouvemens.

PAR M. VARIGNON.

* DANS les Mem. de 1707. Prob. 1, pag. 504, &c. Et dans ceux de 1708, pag. 144, &c. j'ai fait voir ce qui devroit arriver à des corps mûs dans des milieux qui leur réſiſteroient en raiſon de leurs viteſſes actuelles ou reſtantes de leurs primitives malgré les réſiſtances de ces milieux. On appelle ici & là *viteſſes primitives*, celles que ces corps auroient dans des milieux ſans réſiſtance ni action, tels qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide. On a auſſi vû dans les Mem. de 1707, Prob. 2, pag. 513, &c. ce que des mouvemens primitivement uniformes deviendroient dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrez des viteſſes effectives qu'ils y auroient: hypotheſe ordinaire beaucoup plus vraiſemblable que la premiere. Voici preſentement ce qui devroit arriver dans ces milieux à des mouvemens primitivement variez. Mais pour ne pas rendre ce Memoire-ci trop long, non-ſeulement nous n'y emploierons que des viteſſes primitivement variées en raiſon des tems, comme dans l'hypotheſe de *Galilée* ſur la peſanteur; mais encore nous n'y traiterons que des primitivement accelerez en raiſon des tems écoulez, en commençant à zero de viteſſe: Les primitivement

* 15. Juin 1709.

accelerez en raiſon de ces tems écoulez après avoir commencé par des viteſſes quelconques, & les primitivement retardez en raiſon des tems qui reſteroient à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans un milieu ſans réſiſtance, ſeront pour d'autres Memoires. Pour tout cela voici en peu de mots ce qu'il faut ici ſuppoſer des deux Lemmes démontrez dans les Mem. de 1708, pag. 146, &c.

LEMME I.

* *Soient ſur l'axe* ATC *les trois courbes*, ARC, HUC, KEC, *rencontrées en* R, U, E, *par la droite* EV *perpendiculaire en* T *ſur cet axe, & qui rencontre de même en* V *la droite* FVC *inclinée de* 45 *deg. ſur ce même axe* ATC, *par le point* A *duquel ſoit auſſi la perpendiculaire* FK, *laquelle rencontre en* F, H, K, *la droite* FVC, *& les courbes* HUC, KEC. *Soient auſſi les courbes* HUC, ARC, *telles qu'elles aient par tout* UT = RV *correſpondante.*

Après cela ſoient priſes les abſciſſes AT (t) *pour les tems écoulez depuis le commencement du mouvement*; TV (*v*), *pour les viteſſes primitives à la fin de ces tems*; TR (r), *pour les réſiſtances totales, c'eſt-à-dire, pour les ſommes des réſiſtances inſtantanées* (dr) *que le milieu fait effectivement aux viteſſes actuelles ou reſtantes de ces primitives à chaque inſtant* (dt) *des tems correſpondans* AT (t); RV *ou leurs égales* TU (u), *pour ces viteſſes reſtantes*; & ET (z), *pour des affections quelconques de ces viteſſes reſtantes, ſuivant la raiſon deſquelles affections les reſiſtances inſtantanées* (dr) *ſe faſſent, c'eſt-à-dire, auſquel-*

* FIG. I. II. III.

quelles affections ces réſiſtances ſoient proportionelles.

Cela poſé, ſi l'on prend par tout *dt* conſtante de même qu'une autre grandeur quelconque *a*, l'on aura ici

I. $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{du-dv}{z}$ pour Régle générale des réſiſtances des milieux, quelles que ſoient les viteſſes primitives (*v*) ou la ligne *FVC* qui les exprime par ſes ordonnées *TV* (*v*), & ſuivant quelques affections (*z*) des viteſſes effectives (*u*), ou de quelqu'autre choſe à volonté, que ſe faſſent ces réſiſtances inſtantanées (*dr*) du milieu ſuppoſé : dans laquelle Régle l'on aura $du = dv - dr$, la conſtruction donnant $u = v - r$.

* II. Suppoſons préſentement que *FVC* eſt une ligne droite inclinée (ſi l'on veut) de 45. deg. ſur *TV*. Cette conſtruction donnant auſſi *AT* (*t*) = *TV* (*v*), & conſéquemment $dt = dv$ dans la fig. 1. des viteſſes primitives *TV* accelerées en raiſon des tems écoulez depuis le premier inſtant du mouvement commencé à zero de viteſſe ; cette équation générale (*art.* 1.) $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv-du}{z}$, s'y changera en $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} \frac{dt-du}{z}$, qui fera paſſer par *A* les lignes *FVC*, *HUC*.

† III. La même conſtruction donnant *TV* = *TC* dans la fig. 2. des viteſſes primitives *VT* (*v*) retardées en raiſon des tems qui reſteroient à écouler juſqu'à leur entiere extinction, ſi le milieu ne faiſoit aucune réſiſtance ; & conſéquemment auſſi *AC* = *AF* : ſi l'on appelle ici *a* chacune de ces deux dernieres grandeurs conſtantes *AC*, *AF* ; aiant déja *TV*

* Fig. I. † II.

$TV(v)=TC(a-t)$, & conſéquemment auſſi $dv=-dt$, la précédente équation générale (*art.* 1.) ſe changera de même ici en $\frac{dt}{a}=\frac{dr}{z}=\frac{-dt-du}{z}$, qui y donne $AH=AF$, à cauſe qu'en A, $AH=TU=RV=AF$; & fait paſſer la courbe HUC par le point M où ſon axe ATC eſt rencontré par la perpendiculaire NM tirée du point N où la courbe ARC rencontre la droite FVC, à cauſe que UV en MN rend $UT=RV=0$.

* IV. Dans la fig. 3. des viteſſes primitives $TV(v)$ croiſſantes encore comme dans l'art. 2 en raiſon des tems écoulez depuis le premier inſtant du mouvement, lequel mouvement ait ici commencé, non à zero de viteſſe comme dans cet art. 2. mais par une viteſſe quelconque AF appellée b; ſi l'on méne la droite FXC parallele à l'axe ATC: cette addition à la conſtruction précédente donnant $TX=AF=b$; & $XV=FX=AT=t$, donne ici $TV(v)=TX+XV=b+t$, d'où il réſulte encore ici $dv=dt$, & (*art.* 1.) $\frac{dt}{a}=\frac{dr}{z}=\frac{dt-du}{z}$, comme dans l'art. 2: mais $AH=AF$ comme dans l'art. 3.

Tout cela eſt démontré dans le Lem. 1, pag. 146, 147, 148, 149, 150 des Mem. de 1708; & dans ſes Corol. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

LEMME II.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précédent Lem. 1. *les aires* ATUH, ARVF, *que la ſuppoſition qu'on y fait de* TU=RV., *rend.*

* FIG. III.

rend égales entr'elles, ſeront par tout proportionnelles chacune aux eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) *correſpondans en vertu des viteſſes* TU *ou* RV (u) *reſtantes des primitives* TV *malgré les réſiſtances ſuppoſées.*

Cela eſt auſſi démontré dans le Lem. 2, pag. 150 & 151 des Mem. de 1708, en ce que *ATUH—ARVF=ſudt*, & que les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques *AT* (*t*), ſont toûjours entr'eux comme les ſommes (*ſudt*) des viteſſes *TU* (*u*) employées à les parcourir.

On appellera encore ici (comme dans les Mem. de 1708, pag. 151.) *FVC*, *Ligne des viteſſes primitives*; *ARC*, *Courbe des réſiſtances totales* ou *des viteſſes perduës*; *HUC*, *Courbe des viteſſes reſtantes*; & *KEC*, *Courbe des réſiſtances inſtantanées.*

PROBLÊME.

* *Trouver les Courbes* ARC *des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës*, HUC *des viteſſes reſtantes des primitives, &c. Dans l'hypothéſe 1°, des réſiſtances inſtantanées en raiſon des quarrez de viteſſes actuelles ou reſtantes; & 2°, des viteſſes primitives accélerées en raiſon des tems écoulez depuis le commencement du mouvement, ainſi que dans l'hypothéſe de* Galilée *ſur la peſanteur des corps qui tomberoient en lignes droites dans un milieu ſans réſiſtance ni action, tel qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide.*

SO-

FIG. I.

SOLUTION.

I. Suivant le Lem. 1. la premiere de ces deux hypothêſes-ci donnera $TE\ (z) = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{RV \times RV}{AB}\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{\overline{TV-TR}^2}{AB}\left(\frac{\overline{v-r}^2}{a}\right)$ en ſuppoſant $AB = a$ conſtante ; & la ſeconde donnera $TV\ (v) = AT\ (t)$: d'où réſulte $t - r = v - r = u$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de z, v, dans les deux formules générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}, \frac{dt-du}{z} = \frac{dt}{a}$, de l'art. 2. du Lem. 1. La premiere de ces deux équations ſe changera ici en $\frac{dr}{t-r} = \frac{dt}{aa}$ pour la Courbe ARC des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës ; & la ſeconde, en $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$ pour la Courbe HUC des viteſſes reſtantes. Quant à FVC, ſon équation ſuppoſée $t = v$, fait évidemment voir que ce doit être une ligne droite inclinée en A de 45 deg. ſur AT conformément au Lem. 1. & à ſon art. 2.

II. Pour conſtruire les deux Courbes HUC, ARC, il faut conſiderer que la derniere équation (*art.* 1.) $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$ de la Courbe HUC donnant $aadt - aadu = uudt$, donne auſſi $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ pour l'équation de cette même Courbe HUC.

III. Soit préſentement $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$: l'on aura

ra $du = \frac{x+a-x+a}{x+a^2} \times adx = \frac{2aadx}{x+a^2}$, & $aa - uu = aa - \frac{x-a^2}{x+a^2} \times aa = \frac{xx+2ax+aa-xx+2ax-aa}{x+a^2} \times aa = \frac{4a^3x}{x+a^2}$. Donc $\frac{du}{aa-uu}\left(\frac{dt}{aa}\right) = \frac{2aadx}{4a^3x} = \frac{dx}{2ax}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, qui eſt une équation à une Logarithmique d'une ſoûtangente $= \frac{1}{2}a$, & d'ordonnées $= x$ perpendiculaires à ſon aſymptote dont les abſciſſes correſpondantes ſont $= t$.

* IV. Soit donc en A perpendiculairement ſur AT, la droite $AB = a$, par l'extrémité B de laquelle paſſe cette Logarithmique BLC, aiant ſa ſoûtangente $= \frac{1}{2}AB\left(\frac{1}{2}a\right)$, & ATC pour aſymptote dont elle s'écarte du côté de C. Cela étant, ſi l'on prolonge TU juſqu'à la rencontre de cette Logarithmique en L, après avoir rencontré en S la droite BSC parallele à ATC; l'on aura $LT = x$, $LS = x - a$, & $LT + ST = x + a$. Mais la ſuppoſition précedente (*art.* 3.) de $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, donnera auſſi $x+a(LT+ST).\ x-a(LS)::a(AB).u(TU.)$ Et par conſequent $TU = \frac{AB \times LS}{LT+ST} = \frac{AB \times LS}{LT+AB}$. Donc en prenant TU de cette valeur, c'eſt-à-dire, quatriéme proportionnelle aux trois grandeurs $LT+AB$, AB, LS, données par la Logarithmique BLC; la ligne qui paſſera par tous les points U ainſi trouvez, ſera la courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes, exprimée (*art.* 2.) par l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$: laquelle cour-

* Fig. IV.

courbe paſſera par le point A ; puiſque $LS=0$ en B, rend auſſi $TU\left(\frac{AB\times LS}{LT+AB}\right)=0$ en A. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

V. Cette courbe HUC étant ainſi conſtruite, il n'y aura plus qu'à prendre par tout $UR=TV$ (*hyp.*)$=AT$, ou $VR=TU$; & la ligne qui paſſera par tous les points R ainſi trouvez, ſera ici (*Lem.* 1.) la courbe des réſiſtances totales (*r*) ou des viteſſes perduës ($v-u$), exprimée (*art.* 1.) par l'équation $\frac{dr}{1-r^2}=\frac{dt}{aa}$. *Ce qu'il falloit auſſi trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque (*Solut. art.* 4.) $TU=\frac{AB\times LS}{LT+AB}$, il eſt viſible que pour rendre $TU=AB$, il faudroit $LS=LT+AB=2AB+LS$; ce qui ne pouvant arriver qu'à une diſtance infinie de AB qui alors ſeroit nulle par rapport à LS pour lors infinie, la courbe HUC ou (*Solut. art.* 4) AUC ne peut arriver juſqu'en BC qu'à une diſtance infinie de AB. Ainſi BC en doit être une aſymptote.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit (comme du Prob. 1. Corol. 9. pag. 157. des Mem. de 1708, quoique d'hypothèſe differente de celle qu'on fait ici touchant les réſiſtances) que les viteſſes reſtantes & effectives TU (u) augmenteront ici à l'infini ſans jamais devenir uniformes, quoiqu'elles ne puiſ-

ſent

ſent jamais devenir plus grandes que la finie AB (a), & qu'elles approchent toûjours de ſa valeur, ne pouvant l'égaler qu'après le tems infini AC: de ſorte que cette plus grande viteſſe AB (a) en ſera le terme d'accroiſſement, ou (pour parler comme M. *Huygens*) *la viteſſe terminale*. D'où il ſuit à cauſe de (*hyp.*) $AT = TV$, qu'il faudroit un tems infini au mobile pour acquerir dans le milieu réſiſtant ſuppoſé une viteſſe égale à ce qu'il en aquieroit dans un milieu ſans réſiſtance pendant un tems aſſez court $AT = AB$.

COROLLAIRE III.

On voit auſſi que le point A rendant (*Solut. art.* 4.) TU (u) $= 0$, l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ (*Solut. art.* 2.) de la courbe HUC des viteſſes reſtantes (u), doit s'y changer en $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa}$, c'eſt-à-dire, en $dt = du$; ce qui fait voir que cette courbe HUC ou AUC diviſe l'angle droit BAC en deux parties égales, ou (ce qui revient au même) eſt inclinée de 45. degrez en A ſur chacune des orthogonales AT, AB.

COROLLAIRE IV.

On voit de même que le point A rendant pareillement AT (t) $= 0$, & (*Lem.* 1,) TR (r) $= 0$, & conſéquemment auſſi $t - r = 0$; l'équation $\frac{dr}{1 - r^2} = \frac{dt}{aa}$ (*Solut. art.* 1.) de la courbe ARC des réſiſtances totales ou des viteſſes perdues, doit

s'y

s'y réduire à $\frac{dr}{a} = \frac{dt}{aa}$, & conſéquemment y avoir dt infinie par rapport à dr. Par conſéquent cette courbe ARC doit être touchée ici en A par la droite ATC, de même que dans le Prob. 1. Corol. 2. pag. 153 des Mem. de 1708.

COROLLAIRE V.

Puiſque (*Corol.* 2.) AB eſt la plus grande des viteſſes TU que le mobile puiſſe jamais acquerir ici, même après un tems infini; les eſpaces ici parcourus pendant le tems AT (t) en vertu de ces viteſſes reſtantes TU (u), doivent être (*Lem.* 2.) à ce que le mobile en parcouroit pendant les mêmes tems AT d'une viteſſe uniforme égale à cette terminale AB :: ATU. $ATSB$.

COROLLAIRE VI.

I. Quant à la comparaiſon entr'eux des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes TU (u) reſtantes des primitives TV (v) à chaque inſtant de ces tems, on voit (*Lem.* 2.) que ces eſpaces doivent être ici entr'eux comme les aires correſpondantes ATU ($\int u dt$). Mais l'art. 2. de la Solution donnant $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ pour l'équation de la courbe AUC des viteſſes reſtantes (u), l'on aura ici $\int u dt$ $(ATU) = \int \frac{aaudu}{aa-uu}$. Donc les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), doivent être ici entr'eux comme les intégrales correſpondantes $\int \frac{aaudu}{aa-uu}$ (ATU). Cela étant,

II.

II. Soit $yy = aa - uu$, & conſéquemment $ydy = -udu$. L'on aura $\int \frac{aandu}{aa-uu} (ATU) = -\int \frac{aaydy}{yy} = -aa \times \int \frac{dy}{y} = -aa \times ly + q$. Mais le cas de $ATU = 0$, qui (*Solut. art.* 4.) rend auſſi $TU(u) = 0$, rendant ici $y = a$, réduit cette intégrale à $0 = -aa \times la + q$) en prenant a pour l'unité) $= -l1 + q = 0 + q$; ce qui rend auſſi $q = 0$. Donc cette intégrale juſte & préciſe ſera $ATU = -aa \times ly$. Donc auſſi (*art.* 1.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t), ſeront entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $-aaly$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $a = 1$) comme les Logarithmes negatifs $-ly$ correſpondans, ou (à cauſe de la ſuppoſition qu'on vient de faire de $yy = aa - uu$) comme les Logarithmes negatifs $-l\sqrt{aa-uu}$ correſpondans.

III. Mais ſi du centre A; & du raion AB (a), on fait le quart de cercle $B\delta\beta$, que la droite CTA, & ſa parallele UG, continuées rencontrent en β, δ, & qu'on mene le raion $A\delta$; aiant ici $AG = TU = u$, & $A\delta = AB = a$, l'on y aura auſſi $G\delta = \sqrt{aa-uu}$; & par conſéquent le Logarithme négatif de $G\delta$, égal au négatif $l\sqrt{aa-uu}$. Donc (*art.* 2.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT, ſeront ici entr'eux comme les Logarithmes des ſinus $G\delta$ des arcs $B\delta$ dont les complemens $\delta\beta$ auroient pour ſinus les expreſſions AG ou TU des viteſſes (u) aquiſes ici pendant ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées, & pour ſinus total l'expreſſion AB (*Corol.* 2.) de la viteſſe terminale ou de la plus gran-

grande (a) de tout ce qu'il y en a ici de poſſibles.

IV. Cela étant, ſi par le point β on ſuppoſe une Logarithmique $\beta\mu N$, d'une ſoutangente $= A\beta$ (a) ſur l'aſymptote AB prolongée vers N, de laquelle elle s'approche du côté de N, & qui ſoit rencontrée en μ de part ou d'autre du point δ, par $\delta\mu$ parallele à AN; ſon ordonnée $\mu\pi$ parallele à βA, & égale à δG, aiant $A\pi$ pour ſon Logarithme négatif en ſuppoſant toûjours $A\beta$ (a) $= 1$, cette même $A\pi$ ſera auſſi le Logarithme négatif du ſinus δG. Donc (*art.* 3.) les eſpaces ici parcourus pendant des tems écoulez quelconques AT, ſeront auſſi entr'eux comme les $A\pi$ correſpondantes; & conſéquemment l'eſpace ici parcouru pendant un tems infini, doit auſſi être infini.

V. Cela ſe peut encore démontrer indépendamment de ce qui le précede, en prolongeant $\delta\mu$ juſqu'en ω ſur $A\beta$, & en lui faiſant la parallele infiniment proche mn qui rencontre βN, $\mu\pi$, en m, n. Car aiant $\mu\pi = G\delta = \sqrt{\overline{A\delta}^2 - \overline{AG}^2} = \sqrt{aa - uu}$, & conſéquemment $\mu n = \frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}$ poſitive à cauſe que les AG (u) croiſſent à meſure que $\mu\pi$ diminuent; l'on aura ici $\mu\pi$ ($\sqrt{aa-uu}$). ſoûtangente (a) :: μn $\left(\frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}\right)$. $nm = \frac{audu}{aa-uu}$. Donc $\int\frac{audu}{aa-uu} = \int nm = \mu\omega = A\pi$, ou $a \times A\pi = \int\frac{aaudu}{aa-uu} =$ (*art.* 1). $\int udt = ATU$. Donc auſſi (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT, ſeront encore ici entr'eux comme les $a \times A\pi$, ou ſimplement

(à

(à cause de a constante) comme les $A\pi$ correspondantes, ainsi que dans le précédent art. 4.

VI. La même chose se peut encore trouver autrement en considerant que les Méthodes de M. *Leibnitz* & de M. *Bernoulli* pour integrer les fractions rationelles, donnent $\frac{udu}{aa-uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a-u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a+u}$, dont l'intégrale est $\int \frac{udu}{aa-uu} = -\frac{1}{2} \times \overline{la-u} - \frac{1}{2} \times \overline{la+u}$, le Logarithme de $a-u$ moindre que a pris ici pour l'unité, devant être négatif. Donc l'équation $\frac{dt}{aa} = -\frac{du}{aa-uu}$ (*Solut. art.* 2.) de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u), donnant $\int \frac{aadu}{aa-uu} = \int udt = ATU$, l'on aura auſſi $ATU = -\frac{aa}{2} \times \overline{la-u} - \frac{aa}{2} \times \overline{la+u}$. Par conſéquent (*art.* 1.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu de ces viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs $-\frac{aa}{2} \times \overline{la-u} - \frac{aa}{2} \times \overline{la+u}$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de $\frac{aa}{2}$ conſtante) comme les correſpondantes $-\overline{la-u} - \overline{la+u}$: C'eſt-à-dire, comme les différences des Logarithmes de chaque ſinus verſe BG, & de l'excès $AB + BG$ dont il eſt ſurpaſſé par le diametre entier quart de cercle $B\delta\beta$.

VII. Mais $\sqrt{aa-uu}$ (δG ou $\mu\pi$) étant moienne proportionnelle géometrique entre $a-u$, $a+u$, ſon Logarithme, qu'on vient

de trouver (*art.* 4.) être $l\sqrt{aa-uu} = -A\pi$, doit auſſi être moien arithmetique entre $\overline{la-u}$, $\overline{la+u}$; par conſéquent $-2A\pi = \overline{la-u} + \overline{la+u}$, ou $A\pi = -\frac{1}{2} \times \overline{la-u} - \frac{1}{2} \times \overline{la+u}$. Donc (*art.* 6.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), doivent encore être ici entr'eux comme les Logarithmes négatifs $A\pi$ correſpondans des ſinus δG ou $\mu\pi$ des arcs $B\delta$ complemens de ceux $\beta\delta$ dont les ſinus ſont les expreſſions AG ou TU des viteſſes reſtantes ou actuelles (u), & le ſinus total AB pareille expreſſion (*Corol.* 2.) de la plus grande (a) qu'elles puiſſent jamais devenir ici, ainſi qu'on l'a déja vû dans les art. 3, 4, 5.

VIII. En continuant à l'infini la diviſion de $\frac{aaudu}{aa-uu}$, on trouvera $\frac{aaudu}{aa-uu}$ (*udt*) $udu + \frac{u^3du}{aa} + \frac{u^5du}{a^4} + \frac{u^7du}{a^6} + \frac{u^9du}{a^8}$ + &c. Dont l'intégrale eſt $\int udt\ (ATU) = \frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} + \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6} + \frac{u^{10}}{10a^8}$ + &c. à l'infini. Donc (*art.* 1.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), ſeront pareillement ici entr'eux comme ces *ſeries* ou ſuites infinies correſpondantes.

COROLLAIRE VII.

*Le raport de ces eſpaces parcourus pendant les tems AT, ſe trouvera encore, ſi tout ce qu'on voit de la fig. 4, dans la fig. 5, y demeurant

* FIG. V.

rant le même que là, on imagine du centre B par l'angle β du quarré $ABX\beta$ circonſcrit au quart de cercle $B\delta\beta$, une hyperbole équilatere βQZ entre les aſymptotes BX, BZ; & que par chaque point δ où le quart de cercle $B\delta\beta$ eſt rencontré par $U\delta$ parallele à $A\beta$, ſoit une ordonnée PQ avec ſon infiniment proche pq, leſquelles paralleles à BZ, rencontrent l'hyperbole βQZ, en Q, q, & ſon aſymptote BX en P, p. Car cette hyperbole donnant $PQ = \frac{AB \times BX}{BP} = \frac{aa}{\sqrt{aa-uu}}$; & $G\delta$ ou $BP = \sqrt{aa-uu}$, donnant auſſi $Pp = \frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}$ en différentiant u (AG) négativement, à cauſe que BP ou $G\delta$ diminuë à meſure que AG augmente. L'on aura ici $PQ \times Pp$ ($QPpq$) $= \frac{aaudu}{aa-uu}$ (*Corol.* 6. *nomb.* 1.) $= udt$. Par conſéquent $\int udt$ (ATU) $= \int QPpq = \beta XPQ$. Donc (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes TU ou AG (u) reſtantes malgré les réſiſtances du milieu ſuppoſé, doivent être ici entr'eux comme les aires hyperboliques βXPQ correſpondantes; & l'eſpace entier parcouru pendant un tems infini AC, comme l'aire entiere $Z\beta XBZ$, lequel eſpace ſeroit par conſéquent ici infini, ainſi que dans le Corol. 6. art. 4.

COROLLAIRE VIII.

* Le rapport de ces eſpaces ſe trouvera encore par le moien de la Logarithmique BLC

 dont

* FIG. VI.

dont la ſoûtangente eſt $= \frac{1}{2} AB\ (\frac{1}{2} a)$ dans l'art. 4. de la Solution, ſans y emploier celle $\beta\mu N$ qui vient de donner ce raport dans l'art. 4. du précédent Corol. 6, laquelle avoit ſa ſoûtangente $= AB\ (a)$.

I. Car puiſque (*Solut. art.* 3.) $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, & $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$; l'on aura $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{xdx-adx}{xx+xa} = aa \times \frac{dx}{a+x} - \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale eſt $\int u\,dt\ (ATU) = aa \times l\overline{a+x} - \frac{aa}{2} \times lx + q$, en prenant $\frac{a}{2} = 1$. Mais le cas de $ATU = 0$, rendant $LT\,(x) = BA\,(a)$, c'eſt-à-dire $x = a$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times l2a - \frac{aa}{2} la + q$; d'où réſulte $q = \frac{aa}{2} \times la - aa \times l2a$. Donc cette intégrale complette ſera $ATU = aa \times l\overline{a+x} - aa \times l2a + \frac{1}{2} aa \times la - \frac{1}{2} aa \times lx = aa \times l\frac{a+x}{2a} + \frac{1}{2} aa \times l\frac{a}{x}$. Donc auſſi (*Lem.* 2.) les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques $AT\ (t)$ en vertu des viteſſes reſtantes $TU\ (u)$, ſeront entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $aa \times l\frac{a+x}{2a} + \frac{1}{2} aa \times l\frac{a}{x}$, ou ſimplement comme les correſpondantes $l\frac{2+x}{4} + \frac{1}{2} l\frac{2}{x}$, en prenant (dis-je) $\frac{1}{2} a$ pour l'unité.

II. Preſentement ſi après avoir pris $AX = \frac{1}{2} AB\ (\frac{1}{2} a)$ avec $B\beta = AB$ ſur AB prolongée du côté de

de β, & auſſi $L\lambda = AB$ ſur TL prolongée du même côté, ou fait XP, $\beta\psi$, $\lambda\Phi$, paralleles à CA prolongée vers Q, leſquelles rencontrent la Logarithmique CLB prolongée vers P, en P, ψ, Φ, deſquels points on lui faſſe les ordonnées PQ, $\psi\omega$, $\Phi\theta$, paralleles à BA, & qui rencontrent ſon aſymptote CQ en Q, ω, θ: l'on aura $PQ = \frac{1}{2}a$ (*hyp.*) = à la ſoûtangente de cette Logarithmique PBC, $\psi\omega = 2a$, & $\Phi\theta = a + x$; puiſqu'on a (*hyp.*) $AX = \frac{1}{2}a$, $L\lambda = B\beta = AB = a$, & $LT = x$. Donc en prenant encore ici $\frac{1}{2}a$ (PQ) pour l'unité, & conſéquemment a (AB) $= 2$; l'on y aura auſſi $QA = la$, $QT = lx$, $Q\omega = l2a$, & $Q\theta = \overline{la + x}$. Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $ATU = aa \times \overline{la + x} - aa \times l2a + \frac{1}{2}aa \times la - \frac{1}{2}aa \times lx$. Donc l'on aura pareillement ici ATU (*ſudt*) $= aa \times Q\theta - aa \times Q\omega + \frac{1}{2}aa \times QA - \frac{1}{2}aa \times QT$ (à cauſe de $Q\theta - Q\omega = \omega\theta$, & de $QA - QT = -AT$) $= aa \times \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$. Donc auſſi (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $aa \times \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$, ou ſimplement comme les correſpondantes $\omega\theta - \frac{1}{2}AT$, ou comme $2\omega\theta - AT$, dont ω eſt l'origine fixe des $\omega\theta$ de même que A l'eſt des AT.

COROLLAIRE IX.

*On peut encore trouver ce rapport d'eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), par le moien

* FIG. VII.

d'une hyperbole équilatere quelconque $MY\Phi$ entre les aſymptotes orthogonales BA, $B\Phi$, laquelle rencontre CA prolongée en M : en prenant par tout AZ (ſur AB) troiſiéme proportionelle à AB, AG, de maniere qu'on ait par tout (pour chaque TU ou AG) $AB\ (a).\ AG\ (u) :: AG\ (u).\ AZ = \frac{uu}{a}$. Car ſi après avoir fait l'ordonnée ZY à l'hyperbole $MY\Phi$ parallelement à ſon aſymptote $B\Phi$, on appelle les variables AZ, m; ZY, n; & la conſtante AM, c; les noms du reſte demeurant les mêmes que ci-deſſus : l'on aura premierement $m = \frac{uu}{a}$, & $dm = \frac{2udu}{a}$; ſecondement, l'hyperbole $MY\Phi$ donnera $BZ\ (a-m).\ BA\ (a) :: AM\ (c).\ ZY\ (n) = \frac{ac}{a-m}$ (à cauſe que $m = \frac{uu}{a}$ donne $a-m = a - \frac{uu}{a} = \frac{aa-uu}{a}$) $= \frac{aac}{aa-uu}$. Donc $ndm = \frac{2acudu}{aa-uu}$, ou $\frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa-uu}$ (*Corol.* 6 *art.* 1.) $= udt$. Donc auſſi, en intégrant, $\int udt\ (ATU) = \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times MAZY = \frac{AB}{2AM} \times MAZY$. Par conſéquent (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{AB}{2AM} \times MAZY$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de la fraction conſtante $\frac{AB}{2AM}$) comme les aires hyperboliques $MAZY$ correſpondantes, ainſi que

M.

M. *Newton* l'a auſſi trouvé à ſa maniere dans le liv. 2. ſect. 2. prop. 8. pag. 254. & 255. de ſes *Principes Mathématiques* de la Philoſophie naturelle.

COROLLAIRE X.

I. * Si l'on conſidére préſentement que $\frac{du}{aa-uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a-u} + \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a+u}$, & que l'art. 2. de la Solution donne $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$; l'on aura ici $dt \left(\frac{aadu}{aa-uu} \right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a-u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a+u}$, dont l'intégrale eſt $t\,(AT) = -\frac{a}{2} \times \overline{la-u} + \frac{a}{2} \times \overline{la+u} = \frac{a}{2} l \frac{a+u}{a-u}$, en prenant ici a pour l'unité, laquelle ſuppoſition doit rendre le Logarithme de $a-u$ négatif. Donc les tems $AT\,(t)$ employez ici à parcourir les eſpaces trouvez dans les Corol. 6, 7, 8, 9, exprimez par exemple, par les Logarithmes $A\pi$ dans l'art. 4. du Coroi. 6. doivent être entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $\frac{a}{2} \times l \frac{a+u}{a-u}$, ou ſimplement comme les Logarithmes $l \frac{a+u}{a-u}$ correſpondans, c'eſt-à-dire, chacun comme le Logarithme de la raiſon de $AB + AG$ au ſinus verſe GB correſpondans, ou comme le Logarithme de la raiſon $\frac{a+u}{a-u}$ de la ſomme $a+u$ faite de la viteſſe actuelle (u) & de la terminale (a) à leur difference $a-u$.

* FIG. IV.

II. Cela ſuit encore de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution, en y ſuppoſant $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$. Car cette ſuppoſition donnant $ax - aa = ux + ua$, ou $ax - ux = aa + au$, d'où réſulte $x = \frac{aa+au}{a-u}$; l'équation $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, donnera $t\,(AT) = \frac{a}{2} \times lx = \frac{a}{2} \times l\frac{aa+au}{a-u} = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u}$ en prenant toûjours a (AB) pour l'unité. Donc les tems écoulez AT (t) ſeront encore ici entr'eux comme les Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, ou $l\frac{AB+AG}{BG}$ correſpondans, ainſi que dans le précedent art. 1.

III. Ces art. 1 & 2 fourniſſent encore une nouvelle conſtruction de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u). Car ſi après avoir fait les orthogonales indéfinies AN, AC, on prend les abſciſſes AG de la premiere pour ces viteſſes reſtantes ou actuelles (u), & que de la même origine A on prenne enſuite ſur AC les abſciſſes $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} = \frac{AB}{2} \times l\frac{AB+AG}{BG}$ en ſuppoſant toûjours $AB = a = 1$; il eſt manifeſte (*art.* 1 & 2.) que la ligne AUC, qui paſſera par tous les angles U des parallelogrammes rectangles GT faits chacun des deux correſpondantes AG, AT, ſera la courbe des viteſſes reſtantes (u), laquelle ſervira ici, comme dans l'art 5

de

de la Solut. à conſtruire celle *ARC* des réſiſtances totales (*r*) ou des viteſſes perdues.

IV. De ce que (*art.* 3.) il faut toûjours ici $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u}$, il eſt auſſi manifeſte que le cas de $u = a$ rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$ infinie, le tems *AT* ſeroit auſſi pour lors infini : c'eſt-à-dire qu'il faudroit un tems infini pour que l'accéleration des viteſſes reſtantes (*u*) les pût rendre ici $= a$, ou *TU* ou *TS* (*u*) $= AB$ (*a*). Par conſéquent (conformément au Corol. 2.) *AB* ſeroit encore la plus grande de tout ce qu'il y auroit ici de viteſſes poſſibles *TU* ou *AG*, leſquelles en approcheroient toûjours ſans jamais la pouvoir égaler, quoiqu'elle ne ſoit que finie, bien loin de pouvoir devenir uniformes, ainſi que quelques Philoſophes l'ont penſé.

V. On voit auſſi de-là qu'en prenant ainſi $AB = a$ ſur *AN*, ſi l'on fait *BC* parallele à *AC*; cette droite *BC* ſera une aſymptote de la Courbe *AUC*, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1. dont ceci eſt encore une nouvelle preuve.

COROLLAIRE XI.

Il ſuit des art. 1 & 2 du précédent Corol. 9, que ſi les raiſons $\frac{a+u}{a-u}$ des ſommes $(a+u)$ aux différences $(a-u)$ de la plus grande *a* (*Corol.* 2. & *Corol.* 10. *art.* 4.) des viteſſes *u* ici poſſibles, & de ces viteſſes *u* (*TU* ou *AG*) ſucceſſivement ajoûtées & retranchées de cette plus grande ou terminale *a* (*AB*), ſont pris pour des nombres, les tems écoulez *t* (*AT*) à la fin deſquels ſe

trouvent ces viteſſes reſtantes (u), ſeront entr'eux comme les Logarithmes de ces raiſons, ainſi que M. *Leibnitz* l'a dit dans les *Actes de Leipſic* de 1689. pag. 44. art. 5. nomb. 4. puiſque (*Corol.* 10. *art.* 1. & 2.) ces tems AT ſont entr'eux comme les Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, ou $l\frac{AB+AG}{BG}$.

COROLLAIRE XII.

Imaginons préſentement que le corps en queſtion ſoit mû d'une viteſſe primitivement uniforme quelconque, retardée (comme les variées d'ici) par des réſiſtances en raiſon des quarrez des viteſſes actuelles ou reſtantes de celle-là. Soit cette viteſſe primitivement uniforme exprimée par BN priſe telle ſur AB prolongée du côté de N, qu'elle ſoit à TU comme cette viteſſe primitivement uniforme eſt à la reſtante (u) des primitivement accelerées (v) à la fin de quelque tems AT (t) que ce ſoit. Sur CB prolongée vers O juſqu'à ce qu'on ait $BO=BN$, ſoit la perpendiculaire OM; & par le point N entre les aſymptotes OC, OM, ſoit une hyperbole équilatere MNC, laquelle ſoit rencontrée en D par TL prolongée (s'il en eſt beſoin) de ce côté là.

On a vû dans la Solution du Prob. 2, pag. 514, & 515. des Mem. de 1707, que SD ſera ici la viteſſe reſtante de la primitivement uniforme BN à la fin du tems AT ou BS; & dans le Corol. 3, de ce Prob. 2. pag. 516. que l'eſpace parcouru pendant ce tems AT ou BS, en vertu de ces viteſſes reſtantes SD, ſera exprimé

primé par l'aire hyperbolique $NBSD$ correſpondante. On vient de voir auſſi (*Lem.* 2.) que l'eſpace parcouru pendant ce même tems AT en vertu des viteſſes reſtantes TU dont il s'eſt agi juſqu'ici, eſt pareillement exprimé par l'aire ATU correſpondante. Donc la préſente hypothêſe des réſiſtances en raiſon des quarrez des viteſſes, rendra l'eſpace parcouru pendant un tems quelconque AT ou BS en vertu des viteſſes SD reſtantes de la primitivement uniforme ſuppoſée BN, au parcouru pendant le même ou en pareil tems en vertu des viteſſes TU reſtantes des primitivement accélérées TU ſuppoſées ici en raiſon des tems écoulez, comme l'aire hyperbolique $NBSD$ eſt à l'aire correſpondante ATU; & par tout de même.

Les différentes expreſſions de ces eſpaces, démontrées pour le premier dans les Corol. 3. 4. 6. *pag.* 516. *&c. des Mem. de* 1707. *& pour le ſecond dans les Corol.* 6. 7. 8. 9. *de ce Problême-ci, ſerviront à en exprimer encore les raports en d'autres maniéres préſentement trop faciles pour nous y arrêter davantage.*

REMARQUE I.

En prenant ici dv pour l'accroiſſement de viteſſe qu'une peſanteur conſtante donneroit à chaque inſtant à un corps tombant dans un milieu ſans réſiſtance, dr pour ce qu'elle en trouve à chaque inſtant dans un milieu réſiſtant, & du pour l'accroiſſement de viteſſe que cette peſanteur ne laiſſe pas de donner à chaque inſtant au corps tombant dans ce milieu malgré cette réſiſtance; on prouvera comme dans la Remarq. 1. pag. 161 des Mem. de 1708. que cet-

te pesanteur, la résistance qui s'y oppose à chaque instant, & l'excès dont cette pesanteur surpasse cette résistance instantanée, seront ici entr'eux comme les grandeurs dv, dr, du, qui leur répondent.

REMARQUE II.

Les hypothèses de ce Problême-ci donnant (*Solut. art.* 1.) $dt = dv = dr + du$, & $\frac{dr}{uu} = \frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, cela seul donnera ici,

1°. $\frac{dr}{uu} = \frac{dt}{aa} = \frac{dv}{aa}$, d'où résulte $dr. dv :: uu. aa.$ c'est à dire (*Remarq.* 1.) que la résistance de chaque instant sera ici à la pesanteur du mobile, comme le quarré de la viteſſe actuelle ou restante dans cet instant, sera (*Corol.* 2.) au quarré de la viteſſe terminale, ou de la plus grande que le mobile puisse aquerir en vertu de sa pesanteur malgré les résistances supposées: c'est à dire aussi (*Corol.* 1. 2.) :: $AG \times AG. AB \times AB.$

2°. Cette équation $\frac{dr}{uu} = \frac{dv}{aa}$, donnant $dr = \frac{uudv}{aa}$ (à cause de $dv = dr + du$) $= \frac{uudr+uudu}{aa}$, l'on aura ici $aadr = uudr + uudu$, ou $aadr - uudr = uudu$; d'où résulte $dr. du :: uu. aa - uu.$ c'est à dire (*Remarq.* 1.) que la résistance du milieu en chaque instant, sera ici à la différence ou à l'excès dont cette résistance est surpassée par la pesanteur du mobile, comme le quarré de sa viteſſe actuelle ou restante en cet instant, sera à la différence

ou

ou à l'excès dont ce quarré ſera ſurpaſſé par celui de la viteſſe terminale qui eſt (*Corol.* 2.) la plus grande que ce mobile puiſſe jamais aquerir en vertu de ſa peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées : c'eſt-à-dire auſſi (*Corol.* 1. 2.) :: $AG \times AG . AB \times AB - AG \times AG$ (à cauſe du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $AG \times AG . G\delta \times G\delta$.

3°. L'équation $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, donnant $aadt - aadu = uudt$, ou $aadu = aadt - uudt$ (à cauſe de $dv = dt$) $= aadv - uudv$; l'on aura ici $dv . du$ :: $aa . aa - uu$. c'eſt à dire (*Remarq.* 1.) que la peſanteur du mobile ſera ici à la différence ou à l'excès dont elle ſurpaſſera la réſiſtance du milieu en chaque inſtant, comme le quarré de la viteſſe terminale de ce mobile, ou (*Corol.* 2.) de la plus grande qu'il puiſſe jamais aquerir en vertu de cette peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'excès dont ce quarré ſurpaſſera celui de la viteſſe actuelle du même mobile : c'eſt à dire auſſi *Corol.* 1. 2.) :: $AB \times AB . AB \times AB - AG \times AG$ (à cauſe du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $A\delta \times A\delta . G\delta \times G\delta$.

4°. On voit de tout cela & de la Remarq. 1. que ſi l'on prend p pour la peſanteur (dv) du mobile, & f pour la différence (du) dont cette peſanteur ſurpaſſera ici chaque réſiſtance inſtantanée (dr) du milieu ; le nombre premier donnera $dr = \frac{puu}{aa}$; le ſecond, $dr = \frac{fuu}{aa-uu}$; & le troiſiéme, $f = \frac{aap-uup}{aa}$. De ſorte que de ces cinq choſes : *la réſiſtance du milieu en quelque inſtant que ce ſoit, la peſanteur conſtante du corps qui y tombe malgré cette réſiſtance, l'excès dont cette peſanteur ſurpaſſe cette réſiſtance, la viteſſe*

actuelle de ce corps en cet instant, & la plus grande viteſſe qu'il puiſſe jamais aquerir en vertu de ſa peſanteur dans ce milieu malgré les réſiſtances qu'on y ſuppoſe : de ces cinq choſes, dis-je, trois étant données à volonté, l'on aura toûjours les deux autres, ainſi que dans la Remarq. 2. pag. 162. & 163. des Mem. de 1708. pour le Problême qui s'y trouve, pag. 151.

SCHOLIE.

Pour ce qui eſt de la Courbe KEC des réſiſtances inſtantanées, l'équation donnée $z = \frac{uu}{a}$ pour la premiere hypothêſe de ce Problême-ci, rendant $u = \sqrt{az}$, & $du = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$; la ſubſtitution de ces valeurs de u, du, dans l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ trouvée (*Solut. art.* 2.) pour celle de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u), la changera en $dt = \frac{a^2dz}{aa-az\times 2\sqrt{az}} = \frac{aadz}{2a\sqrt{az}-2z\sqrt{az}}$ qui ſera celle de la Courbe KEC, laquelle

1°. Paſſera par A de même que (*Solut. art.* 4.) HUC ; puiſque le cas de $u\ (TU) = o$, rend auſſi $z = (TE) = o$. D'où l'on voit de plus qu'en A la précédente équation ſe réduiſant à $dt = \frac{aadz}{o}$, la Courbe KEC qu'elle exprime, doit avoir dt infinie en A par raport à dz ; & conſéquemment y être touchée par ſon axe ATC, de même que (*Corol.* 4.) la Courbe ARC des-

des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës; au lieu que la Courbe *HUC* des viteſſes reſtantes doit (*Corol.* 3.) faire en *A* avec le même axe *ATC* un angle de 45. deg.

2°. Cette Courbe *KEC* ou (*nomb.* 1.) *AEC* ainſi touché en *A* par ſon axe *ATC*, lui preſentera ſa convexité juſqu'à une ordonnée $TE = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}AB$, à l'extrémité *E* de laquelle elle aura un point d'inflexion, depuis lequel elle preſentera toûjours ſa concavité à cet axe *ATC* en s'en éloignant juſqu'à une ordonnée $TE = AB$, qu'elle aura lorſque $TU = AB$; puiſque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a} = \frac{TV \times TV}{AB}$, & par conſéquent $TE = AB$ lorſque $TU = AB$; ce qui ne pouvant arriver (*Corol.* 1.) que lorſque *AT* ſera devenuë infinie; fait voir que l'aſymptote *BC* de la Courbe *HUC* ou (*Solut. art.* 4) *AUC* des viteſſes reſtantes ou effectives *u*, ſera auſſi une aſymptote de la Courbe *KEC* ou (*nomb.* 1.) *AEC* des réſiſtances inſtantanées *z* (*dr*).

* 3°. Il eſt aiſé de voir dans la Fig. 7. que puiſque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a}$, & que le Corol. 9. donne auſſi $AZ = \frac{uu}{a}$; ſi l'on y prolonge *YZ* juſqu'à la rencontre de *TU* en *E*, ce point *E* ſera un de ceux de la Courbe *AEC* des réſiſtances inſtantanées *z* (*dr*); & ainſi des autres à l'infini. D'où l'on voit (*Solut. art.* 5.) que la conſtruction d'une quelconque des trois Courbes *AUC*, *ARC*, *AEC*, donne tout d'un coup celles des deux autres dans la fig. 4.

4°. Si

* Fig. VII.

4°. Si après avoir décrit cette Courbe *AEC* en prenant par tout *TE* troiſiéme proportionnelle à *TS*, *TU*, c'eſt à dire $TE = \frac{TU \times TU}{TS} = \frac{uu}{a}$, ou même *EY* parallele à *TM*, & qui rencontre l'hyperbole *MYΦ* en *Y*, & ſon aſymptote *BA* en *Z*; l'on aura par tout auſſi $AZ = \frac{uu}{a}$, & conſéquemment (*Corol.* 9.) les aires hyperboliques *MAZY* en raiſon des eſpaces ici parcourus pendant les tems *AT* correſpondans en vertu des viteſſes reſtantes *TU* à chaque inſtant de ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées.

AUTRE SOLUTION.

* I. On vient de trouver (*Solut. art.* 2.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa-uu}$ pour l'équation de la Courbe *HUC* des viteſſes reſtantes (*u*) malgré les réſiſtances ſuppoſées. Soit $\frac{a^4}{ss} = aa - un$: l'on aura $uu = aa - \frac{a^4}{ss} = \frac{aass-a^4}{ss}$, d'où réſulte $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss-aa}$; & $du = \frac{-ads\sqrt{ss-aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss-aa}}}{ss}$ $= \frac{-ass+a^3+ass}{ss\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{a^3ds}{ss\sqrt{ss-aa}}$. Donc dt $\left(\frac{aadu}{aa-uu}\right) = \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$, qui eſt une équation à une hyperbole équilatere *APC* décrite du centre *Q*, &

* FIG. VIII.

& du demi axe transverse $OA = a$, aiant ses abscisses $OQ = s$, & ses ordonnées $QP = \sqrt{ss-aa}$, auxquelles soit AB parallele rencontrée en G par une droite quelconque OP, qui tirée du centre O rencontre l'hyperbole APC en P.

II. L'on aura le triangle $OQP = \frac{s\sqrt{ss-aa}}{2}$, & (en supposant Op infiniment proche de OP, avec pq parallele à PQ) sa différentielle $POp + PpqQ = \frac{\sqrt{ss-aa}}{2} \times ds + \frac{ssds}{2\sqrt{ss-aa}} = \frac{ss-aa+ss}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{2ss-aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds$. Mais $PpqQ = ds\sqrt{ss-aa} = \frac{\sqrt{ss-aa}}{ss-aa} \times ds = \frac{2ss-2aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds$. Donc $POp = \frac{2ss-aa-2ss+2aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{aads}{2\sqrt{ss-aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$. Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$, & conséquemment $\frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$. Donc $\frac{adt}{2} = POp$, ou $dt \frac{2}{a} \times POp$; & en intégrant, $t\,(AT) = \frac{2}{a} \times PAO = \frac{2 \times PAO}{AO}$, c'est à dire, les tems écoulez AT en raison des secteurs hyperboliques PAO correspondans, ainsi que M. *Newton* l'a aussi démontré à sa maniere dans ses *Princ. Mathem.* Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. pag. 258. & 259.

III. De plus la précédente supposition (*art.* 1.) de $\frac{a^+}{ss} = aa - uu$ donnant $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss-aa}$, l'on

l'on aura $a\ (AO).\ u\ (TU)::s\ (OQ).\ \sqrt{ss-aa}\ (QP)::AO.\ AG.$ Et par conſéquent $TU\ (u) = AG.$

IV. Donc (*art.* 2. & 3.) ſi l'on prend $AT\ (t) = \frac{2 \times PAO}{AO}$, & qu'on acheve le rectangle GT, ſon angle U ſera un des points de la Courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes (u); & ainſi de tous ſes autres points à l'infini. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Cette Courbe HUC *des viteſſes reſtantes* (u), *ainſi conſtruite, ſervira comme dans l'art.* 5. *de la Solut.* 1. *à conſtruire la Courbe* ARC *des réſiſtances totales* (r), *&c.*

COROLLAIRE XIII.

Il ſuit de cette Solut. 2. que lorſque $OQ\ (s) = OA\ (a)$ rend $QP\ (\sqrt{ss-aa}) = o$, & conſéquemment auſſi $PAO = o$, il en doit réſulter non-ſeulement $t\left(\frac{2 \times PAO}{AO}\right) = o$, mais encore $u\left(\frac{u}{s}\sqrt{ss-aa}\right) = o$: c'eſt à dire, $AT\ (t) = o$, & $TU\ (u) = o$. Par conſéquent la Courbe HUC des viteſſes actuelles ou reſtantes (u) doit ici paſſer par A, ainſi qu'on l'a déja vû dans l'art. 4. de la Solut. 1. & dans l'art. 2. du Lem. 1. pour tous les mouvemens dont les primitifs commencent, comme ici, à zero de viteſſes; ce qui ſe voit ſans calcul pour quelque hypothèſe de réſiſtances que ce ſoit, en ce que les viteſſes reſtantes n'y ſont que les reſtes des primitives qui au premier inſtant du mouvement, ne ſont point encore diminuées.

Co-

COROLLAIRE XIV.

Si l'on prend $AB = AO$ (a), on ſait que la droite OBC ſera une des aſymptotes de l'hyperbole équilatere APC ; & qu'ainſi OP ne pouvant jamais couper AB par delà B, l'ordonnée TU (AG) ne peut jamais être plus grande que AB, à l'égalité de laquelle elle approchera toûjours ſans jamais y arriver que lorſque le triligne hyperbolique PAO ſera infini, c'eſt à dire ſeulement lorſque AQ & (*Solut.* 2. *art.* 2.) AT le ſeront. D'où l'on voit encore que BC parallele à ATC, doit être ici une aſymptote de la Courbe AUC des viteſſes actuelles ou reſtantes TU (u) des primitives TV (v), ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1. & dans l'art. 5. du Corol. 10. De-là ſuivent encore les Corol. 2. & 5.

COROLLAIRE XV.

Puiſque (*hyp.*) TV exprime ici la viteſſe primitive du mobile à la fin du tems AT, c'eſt à dire, ce que la peſanteur conſtante de ce mobile lui en auroit donné de verticale de haut en bas pendant ce tems AT dans un milieu ſans réſiſtance ni action ; & que (*Solut.* 1. 2.) TU exprime de même ce que la réſiſtance ſuppoſée du milieu où ce corps eſt ſuppoſé ſe mouvoir ici, lui laiſſe de cette viteſſe primitive à la fin de ce même tems AT ; cette viteſſe reſtante TU ſera à cette primitive TV :: $TU . TV$ (à cauſe que la ſeconde hypothêſe de ce Problême-ci donne $TV = AT$) :: $TU . AT$. Mais (*Solut.* 2. *art.* 2.) $AT = \frac{2 \times PAO}{AO}$. Donc chaque vi-

viteſſe reſtante TU ſera ici à la primitive correſpondante $TV :: TU. \frac{2\times APO}{AO}$ (la Solut. 2. art. 3. donnant $AG = TU$) $:: AG. \frac{2\times PAO}{AO} :: \frac{AG\times AO}{2}$. $PAO :: GAO. PAO$: C'eſt à dire, comme triangle rectiligne GAO eſt au ſecteur hyperbolique PAO correſpondant, ainſi que M. *Newton* l'a auſſi démontré à ſa maniére dans le Corol. 3. Prop. 9. Sect. 2. pag. 259. de ſes *Principes Mathematiques*.

COROLLAIRE XVI.

Il ſuit encore des Solut. 1. & 2. que le tems qu'il faudroit à la peſanteur conſtante du corps mû verticalement de haut en bas, pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance & ſans action, une viteſſe égale à la plus grande AB qu'il puiſſe (*Corol.* 1. & 14.) jamais lui donner dans un milieu qui (comme ici) lui réſiſteroit en raiſon des quarrez des viteſſes de ce corps : il ſuit, dis-je, que ce tems ſeroit à ce qu'il en faudroit à cette peſanteur pour donner à ce même corps la viteſſe TU ou (*Solut.* 2, *art.* 3.) AG malgré les réſiſtances de ce dernier milieu :: $AB. AT$ (*Solut.* 2. *art.* 2.) :: $AB. \frac{2\times PAO}{AO} :: \frac{AB\times AO}{2}$. $PAO :: BAO. PAO$. c'eſt à dire, comme le triangle rectiligne BAO eſt au ſecteur hyperbolique PAO.

COROLLAIRE XVII.

I. Puiſque (*Solut.* 2. *art.* 1.) $\frac{aa}{ss} = aa - uu$, ou

ou $uu = aa - \frac{a^4}{ss} = \frac{aass - a^4}{ss}$, l'on aura $ndu = \frac{aas^3 - aass + a^4 s}{s^4} \times ds = \frac{a^4 ds}{s^3}$; & par conſéquent $\frac{aaudu}{aa-uu} = \frac{a^6 ds}{s^3} \times \frac{ss}{a^4} = \frac{aads}{s}$. Mais (*Solut.* 1. *art.* 2.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa-uu}$, & conſéquemment auſſi $udt = \frac{aaudu}{aa-uu}$. Donc $udt = \frac{aads}{s}$, & (en intégrant) $\int u\,dt = \int \frac{aads}{s} = aa \times ls + q$. Mais le cas de $\int udt\ (ATU) = o$, rendant P en A, & conſéquemment $OQ\ (s) = OA\ (a)$, réduit cette intégrale à $o = aa \times la + q$, d'où réſulte $q = -aa \times la$. Donc cette intégrale complette ſera $ATU\ (\int udt) = aa \times ls - aa \times la = aa \times l\frac{s}{a}$; ce qui ſe réduit à $ATU = ls$ en prenant a pour l'unité. Donc (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAQ}{AO}$, doivent être ici comme les $aa \times l\frac{s}{a}$, ou ſimplement comme les $l\frac{s}{a}$ correſpondantes: c'eſt à dire (*Solut.* 2. *art.* 1.) comme les logarithmes des fractions ou des raiſons $\frac{OQ}{OA}$ correſpondantes, quelle que ſoit la valeur de la conſtante $OA\ (a)$; ou ſimplement comme les logarithmes des abſciſſes OQ, lorſqu'on prend OA pour l'unité.

II. Si l'on conſidere preſentement que l'équation $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$ de l'art. 1. de la Solut. 2. don-

donne $s = \frac{aa}{\sqrt{aa-uu}}$, on trouvera par la ſubſtitution de cette valeur de s dans $aa \times l\frac{s}{a}$, que les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2\times PAO}{AO}$, ſeront auſſi entr'eux (*art.* 1.) en raiſon des grandeurs correſpondantes $aa \times l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}}$, ou ſimplement (à cauſe de a conſtante) en raiſon des Logarithmes $l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}}$ correſpondans : De ſorte qu'en prenant encore ici a pour l'unité, cette ſuppoſition rendant $l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}} = l\frac{1}{\sqrt{aa-uu}} = l1 - l\sqrt{aa-uu} = 0 - l\sqrt{aa-uu} = -l\sqrt{aa-uu}$; ces eſpaces ſe trouveront pareillement ici être entr'eux en raiſon des Logarithmes négatifs $-l\sqrt{aa-uu}$ correſpondans, ainſi que dans l'art. 2. du Corol. 6.

COROLLAIRE XVIII.

Il ſuit encore de la Solut. 2. que ſi après avoir pris (ſur AB) AZ troiſiéme proportionelle à AB, AG ; & Az troiſiéme proportionelle à AB, Ag ; en ſorte qu'on ait $AB \times AZ = AG \times AG$, $AB \times Az = Ag \times Ag$, & par tout de même ; on imagine une ſeconde hyperbole équilatere quelconque $MY\Phi$ entre les aſymptotes orthogonales Ab, $B\Phi$, laquelle rencontre AO en M, & ſes paralleles ZY, zy, en Y, y ; & de plus Op rencontrée en L par QP pro-

prolongée de ce côté-là : L'on aura les aires hyperboliques $AZYM$ en raiſon des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAQ}{AO}$ correſpondans, ainſi qu'on l'a déja conclu de la Solut. 1. dans le Corol. 9.

1°. Car aiant ici $POp = POL$, l'on aura auſſi $POp . GOg :: POL . GOg :: OP \times OP . OG \times OG :: OQ \times OQ . OA \times OA :: PQ \times PQ . AG \times AG$. Mais l'analogie de $OQ \times OQ . OA \times OA :: PQ \times PQ . AG \times AG$. donnant $OQ \times OQ . PQ \times PQ :: OA \times OA . AG \times AG$. donne auſſi $OQ \times OQ - PQ \times PQ . PQ \times PQ :: OA \times OA - AG \times AG . AG \times AG$. ou $PQ \times PQ . AG \times AG :: OQ \times OQ - PQ \times PQ . OA \times OA - AG \times AG$. Donc $POp . GOg :: OQ \times OQ - PQ \times PQ . OA \times OA - AG \times AG$. Mais l'hyperbole APC, qui donne $PQ \times PQ = OQ \times OQ - OA \times OA$, donne auſſi $OA \times OA = OQ \times OQ - PQ \times PQ$; & l'on avoit ci-deſſus (*hyp.*) $AG \times AG = AB \times AZ$. Donc $POp . GOg :: OA \times OA . OA \times OA - AB \times AZ$ (à cauſe de $OA = AB$ ſuivant le Corol. 14.) $:: AB \times AB . AB \times AB - AB \times AZ :: AB . AB - AZ :: AB . BZ$. Mais le triangle rectangle $GOg = \frac{OA \times Gg}{2} = \frac{AB \times Gg}{2}$. Donc $POp . \frac{AB \times Gg}{2} :: AB . BZ$. Par conſéquent $POp = \frac{AB \times AB \times Gg}{2 \times BZ}$. Mais l'hyperbole $MY\Phi$ donnant $BZ \times ZY = AB \times AM$, donne auſſi $BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$. Donc $POp = \frac{AB \times ZY \times Gg}{2 \times AM}$;

&

& par conſéquent auſſi $\frac{ZY \times Gg}{AM} = \frac{2 \times POp}{AB} = \frac{2 \times POp}{AO}$ (*Solut. 2. art. 2.*) $= dt$.

2°. Mais puiſque (*hyp.*) $AB \times AZ = AG \times AG$, la differentiation de cette égalité donnera $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, d'où réſulte $Gg = \frac{AB \times Zz}{2 \times AG}$. Donc (*nomb. 1.*) $POp = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times AM \times AG}$, ou $AG = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times AM \times POp} = \frac{AB \times AB \times ZzyY}{4 \times AM \times POp}$: c'eſt-à-dire, les viteſſes reſtantes inſtantanées AG ou TU (u) en raiſon des fractions correſpondantes $\frac{ZzyY}{POp}$, à cauſe de la fraction conſtante $\frac{AB \times AB}{4 \times AM}$: ou bien auſſi comme les correſpondantes $\frac{AB \times ZzyY}{2POp}$, c'eſt à dire (la Solut. 2. art. 2. donnant $dt = \frac{2 \times POp}{a} = \frac{2 \times POp}{AB}$) comme les fractions correſpondantes $\frac{ZzyY}{dt}$.

3°. Or ces mêmes viteſſes ſont auſſi comme les fractions des eſpaces qu'elles font parcourir, diviſez chacun par l'inſtant (dt) qui y eſt emploié. Donc l'aire hyperbolique élementaire $ZzYy$ ſera auſſi comme l'eſpace parcouru de la viteſſe AG ou TU (u) pendant l'inſtant dt $\left(\frac{2 \times POp}{AO}\right)$ correſpondant ; & par tout de même. Donc (en integrant) les ſommes $AzyM$ ou $AZYM$ de ces petites aires $ZzyY$, doivent être ici par tout proportionnelles aux ſommes ($\int u\,dt$) des viteſſes (u) qui ſe ſont ſucceſſivement trouvées dans

dans tous les inſtans des tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2) $\frac{2\times PAO}{AO}$ (*t*). Donc auſſi (*Lem.* 2.) les eſpaces ici parcourus pendant ces mêmes tems $AT\left(\frac{2\times PAO}{AO}\right)$ en vertu des viteſſes AG ou TU ſucceſſivement reſtantes des primitives ſuppoſées TV à chaque inſtant de ces tems, doivent être entr'eux comme les aires hyperboliques $AZYM$ correſpondantes, ainſi que l'Analyſe l'a auſſi fait voir dans le Corol. 9.

COROLLAIRE XIX.

I. Puiſque (*Corol.* 18.) les AZ, Az, &c. ſont entr'elles comme les quarrez $AG\times AG$, $Ag\times Ag$, &c. des viteſſes (*Solut.* 2. *art.* 3.) reſtantes ou actuelles (*u*), & que (*hyp.*) les réſiſtances inſtantanées (*dr*) ſont pareillement ici entr'elles comme ces quarrez de viteſſes; ces AZ, Az, &c. ſeront auſſi entr'elles comme ces réſiſtances inſtantanées conformément au nomb. 3. du Schol. de la Solut. 1. Donc en prenant ces AZ pour ces réſiſtances, l'on aura AB pour la plus grande ce qu'il y en a ici de poſſibles : puiſque (*Corol.* 2. & 14.) AB eſt auſſi la plus grande des viteſſes ici poſſibles AG (TU), aux quarrez deſquelles ces réſiſtances inſtantanées ſont (*hyp.*) proportionelles, & que l'analogie $AB.AG::AG.AZ$. ſuppoſée au commencement du Corol. 18. donne $AZ=AB$ dans le cas de $AG=AB$. Mais en ce cas de la plus grande AB des viteſſes AG, à laquelle répond auſſi la plus grande AB des réſiſtances AZ, la peſanteur du mobile doit être égale à cette plus gran-

de réſiſtance AB : autrement leur inégalité augmenteroit ou diminueroit la viteſſe AB ; ce qui eſt également impoſſible ſuivant les Corol. 2. & 14. Donc en prenant ici les AZ pour les réſiſtances inſtantanées (dr), l'on aura auſſi AB pour la peſanteur conſtante du corps mû malgré elles en ligne droite de haut en bas en vertu de cette peſanteur laquelle eſt de même genre que ces réſiſtances ; & cette même peſanteur les devant ſurmonter chacune à chaque inſtant de l'excès BZ dont elle ſurpaſſe chacune d'elles ; l'on aura pareillement BZ pour ce qui doit reſter de force à cette peſanteur à la fin du tems AT pour augmenter la viteſſe AG (u) d'une quantité infiniment petite Gg (du) laquelle augmentera auſſi la réſiſtance AZ d'une quantité Zz infiniment petite par raport à cette réſiſtance. Donc BZ, Bz, &c. ſeront ici les reſtes agiſſans de la peſanteur AB à la fin des tems AT, At. &c.

II. On voit de là qu'en exprimant (*Corol.* 9. & 18.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2}{a} \times PAO$, par les aires hyperboliques $AZYM$; la viteſſe reſtante du mobile à la fin de ces tems ou de ces eſpaces, ſa viteſſe terminale, la réſiſtance du milieu à la fin de ces mêmes tems ou eſpaces, la peſanteur du mobile, & l'excès ou difference de force dont cette peſanteur ſurpaſſe cette réſiſtance, pourront être exprimées de même par les lignes AG, AB, AZ, AB, BZ. De ſorte que trois quelconques des deux eſpeces de grandeurs qu'elles expriment, étant données, pourvû que ce ne ſoient pas les trois dernières, l'analogie $AB . AG :: AG . AZ$. des Corol. 9. & 18. donnera

nera toûjours les deux autres ; & même deux ſeulement des trois dernieres étant données à volonté, l'on aura toûjours la troiſiéme d'entr'elles. Ceci comprend les Corol. 1. 2. 3. pag. 296. des *Princ. Math.* de M. *Newton.*

III. Si l'on imagine préſentement chacune des aires hyperboliques *AzyM*, &c. diviſée en parties égales quelconques *AZYM*, *ZzyY*, &c. parallelement à *BΦ* : c'eſt à dire (*Corol.* 9. & 18.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems *At*, &c. diviſez chacun en parties égales quelconques ; les *BZ*, *Bz*, &c. ſeront en progreſſion géometrique. Donc (*art.* 1. & 2.) les forces (*BZ*, *Bz*, &c.) reſtantes de la peſanteur (*AB*) diminuée à chaque inſtant de la valeur de celle des réſiſtances (*AZ*, *Az*, &c.) qu'elle a pour lors à ſurmonter, ſeront auſſi en progreſſion géometrique à la fin des parties égales de chacun des eſpaces parcourus pendant les tems correſpondans *AT*, *At*, &c. ainſi que M. *Newton* l'a auſſi trouvé dans ſa Prop. 8. pag. 254. & 255. de ſes *Princ. Math.*

IV. On voit de-là, que ſi l'on prenoit ces reſtes *BZ*, *Bz*, de peſanteur, pour des nombres, dont le plus grand *AB*, qui (*art.* 1. & 2.) exprimeroit cette peſanteur entiere du corps en queſtion, fût pris pour l'unité ; les eſpaces ici parcourus pendant les tems *AT*, *At*, &c. correſpondans, en ſeroient les Logarithmes négatifs. D'où l'on voit auſſi que ſi (*fig.* 9.) l'on exprimoit ces eſpaces par les abſciſſes *BD* de l'aſymptote *BC* (parallele à *ATC*) d'une Logarithmique *AMC* d'une ſoûtangente $= AB = 1$, leſquelles fuſſent priſes du côté *C* qu'elle s'en approche, depuis l'Ordonnée *AB* ; les autres

Ordonnées extérieures DM correſpondantes aux abſciſſes BD, y exprimeroient les reſtes de peſanteur du mobile à la fin de ces eſpaces, c'eſt à dire, les excès dont ſa peſanteur ſurpaſſeroit alors les réſiſtances qui s'y oppoſeroient; & les Ordonnées intérieures NM, ces réſiſtances mêmes.

V. Cela étant, & cette Logarithmique AMC d'une ſoûtangente $= AB = 1$, étant ainſi ajoûtée à la Courbe AUC (*Solut.* 1. *art.* 4. & *Corol.* 13.) des viteſſes reſtantes (*n*), & ſur la même aſymptote BC qu'elle; ſi l'on méne une Ordonnée quelconque TU de cette Courbe AUC; qu'on faſſe UG parallele à TA, & qui rencontre AB en G; qu'on prenne AZ troiſiéme proportionelle à AB, AG; qu'on faſſe ZM parallele à ATC, & qui rencontre la Logarithmique AMC en M; & qu'on méne par ce point M la droite DN parallele à AB, & qui rencontre perpendiculairement en N, D, les paralleles ATC, BC: il eſt viſible

1°. Qu'en prenant, par exemple, AT pour les tems écoulez depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois TU ou AG (*Solut.* 1. & 2.) pour les viteſſes reſtantes à la fin de ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées; BD ou AN (*art.* 3 & 4.) pour les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes TU pendant ces mêmes tems AT; AZ ou NM (*art.* 1.) pour les réſiſtances qui s'y oppoſent à la fin de ces eſpaces BD ou de ces tems AT; AB ou ND (*art.* 1.) pour la peſanteur du mobile; BZ ou DM (*art.* 2. & 3.) pour les excès dont cette peſanteur AB ſurpaſſe chacune des réſiſtances AZ à la fin des tems AT, c'eſt à dire, pour ce qui reſte alors de force à cette

te pesanteur pour accelerer le mobile.

2°. Il est pareillement visible que si au lieu de prendre AT pour les tems écoulez, l'on eût pris à volonté quelqu'une des autres grandeurs TU, BD, NM, DM, AB, &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. L'on auroit trouvé de même que les tems écoulez depuis le commencement du mouvement, sont ici comme les AT correspondantes, & tout le reste comme dans ce nomb. 1. Ce détail est presentement trop aisé pour nous y arrêter davantage.

COROLLAIRE XX.

I. La même chose peut encore se conclure de la Solut. 1. *Car puisque l'art. 2. de cette Solution donne $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, l'on aura ici $udt = \frac{aadu}{aa-uu}$, ou $mudt = \frac{maadu}{aa-uu}$. Donc en faisant $mudt$ constante, quelque nombre fini que m puisse exprimer; c'est à dire, en prenant ces parties $mudt$ de l'espace $sudt$ (ATU) ici parcouru (*Lem.* 2.) pendant un tems AT quelconque, par tout égales entr'elles; les fractions correspondantes $\frac{udu}{aa-uu}$ seront aussi constantes, puisque m, a, sont supposées l'être. Par conséquent les $aa-uu$ ou $a-\frac{uu}{a}$ correspondantes seront alors en progression géometrique. Mais suivant le nomb. 3. de la Remarq. 2. qui suit le Corol. 11. la pesanteur du mobile sera ici à la

* FIG. VII.

différence ou à l'excès de force dont elle ſurpaſſera la réſiſtance du milieu à chaque inſtant, c'eſt à dire, à ce que cette réſiſtance inſtantanée laiſſera pour lors de force à cette peſanteur pour augmenter la viteſſe du mobile :: aa. $aa-uu$ :: a. $a-\frac{uu}{a}$. De ſorte qu'en prenant (comme l'on vient de faire dans l'art. 1. du Corol. 19.) AB (a) pour cette peſanteur, l'on aura ici $a-\frac{uu}{a}$, c'eſt à dire (*Corol.* 9.) BZ, pour ce qui lui reſte de force à chaque inſtant correſpondant nonobſtant la réſiſtance ſuppoſée. Donc les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t), étant diviſez en parties égales auſſi quelconques, ces reſtes BZ de force ou de peſanteur à la fin de chacune de ces parties, ſeront en progreſſion géometrique, ainſi que dans l'art. 3. du Corol. 19. D'où ſuivent auſſi les art. 4. & 5. de ce même Corol. 19.

II. Cela ſe peut encore déduire de la Solut. 1. ſans le ſecours de la Remarq. 2. qu'on en vient de citer. Car puiſque $mudt$ conſtante (*hyp.*) auſſi-bien que maa dans l'équation $mudt = \frac{maaudu}{aa-uu}$ réſultante de celle $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ de l'art. 2. de la Solut. 1. rend (*art.* 1.) $aa-uu$ ou $a-\frac{uu}{a}$ en progreſſion géometrique, dont a exprime ici la peſanteur abſoluë du mobile, & $\frac{uu}{a}$ (*Schol. nomb.* 3.) la réſiſtance que lui fait à chaque inſtant le milieu où il tombe; cette différence ou ce reſ-

te

te $a - \frac{uu}{a}$ (BZ) de pesanteur doit être ici en progression géometrique à la fin des parties égales *mudt* de l'espace *sudt* (ATU) parcouru (*Lem.* 2) en vertu de ces restes de force ou de pesanteur pendant le tems AT, ainsi que dans le précedent art. 1. & que dans l'art. 3. du Corol. 19, d'où suivent encore les art. 4. & 5. de ce Corol. 19.

COROLLAIRE XXI.

*Puisque (*Corol.* 19. *art.* 1. & *Corol.* 20. *art.* 1. 2) BZ $\left(a - \frac{uu}{a}\right)$ est ce qui reste de force à la pesanteur absoluë AB (a) pour produire à chaque instant l'augmentation (du) de la vitesse AG ou TU (u) restante alors malgré la résistance AZ $\left(\frac{uu}{a}\right)$ du milieu qui s'y oppose, il est visible que lorsque cette résistance instantanée sera égale à cette pesanteur absoluë, c'est à dire, lorsque $AZ = AB$, il n'y aura plus ici du tout d'augmentation de vitesse. Ainsi AG pour lors aussi égale à AB, donnera cette même AB (a) pour la plus grande des vitesses (u) que le mobile puisse acquerir ici pendant le tems AT (t) qui pour lors sera infini, ainsi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 2. & 14. & l'aire hyperbolique $AZYM$ alors égale à $\Phi YMAB\Phi$, fait voir (*Corol.* 9. & 18.) que l'espace ici parcouru pendant ce tems infini, seroit pareillement infini, ainsi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 6. 7. & qu'il suit encore des Corol. 8. 9. 17. 18.

* FIG. VII. VIII.

COROLLAIRE XXII.

De ce que (*Corol.* 19. *art.* 1. *& Corol.* 21.) la plus grande des réſiſtances inſtantanées *AZ* ici poſſibles eſt égale à la peſanteur abſoluë *AB* du corps tombant en vertu de cette peſanteur malgré ces réſiſtances, & que (*Corol.* 2. & 14.) la viteſſe *AG* eſt à la plus grande que ce corps puiſſe aquerir ici :: *AG*. *AB*. On voit que de ces cinq choſes dans l'hypothêſe des réſiſtances en raiſon des quarrez des viteſſes : *Peſanteur abſoluë* AB *ou plus grande* AB *des réſiſtances inſtantanées*, *plus grande* AB *des viteſſes ici poſſibles*, *une quelconque* AG *d'entr'elles*, *la réſiſtance inſtantanée* AZ *qui s'y oppoſe*, *& le reſte* BZ *de peſanteur qui l'augmente* : trois étant données à volonté, l'on aura toûjours les deux autres, ainſi que dans le nomb. 4. de la Remarq. 2. qui ſuit le Corol. 12.

COROLLAIRE XXIII.

Puiſqu'en géneral chaque viteſſe inſtantanée ne conſiſte que dans le raport de l'eſpace parcouru en vertu de cette viteſſe, à l'inſtant emploié à le parcourir, l'on aura (*Corol.* 18. *nomb.* 3.) les viteſſes **AG* (*u*) en raiſon des fractions $\frac{Zr \times Zz}{dt}$ correſpondantes (conformément au Corol. 18. nomb. 2.) ou les inſtans *dt* (*Tt*) en raiſon des fractions $\frac{Zr \times Zz}{AG}$ pareillement correſpondantes. Mais (*Corol.* 18. *nomb.*

* FIG. VIII.

nomb. 2.) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, d'où réſulte $Zz = \frac{2AG \times Gg}{AB}$; & l'hyperbole $M\Upsilon\Phi$ donne $BZ \times Z\Upsilon = AB \times AM$, ou $Z\Upsilon = \frac{AB \times AM}{BZ}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de $Z\Upsilon$, Zz dans l'expreſſion précedente $\frac{Z\Upsilon \times Zz}{AG}$ des inſtans *dt* (*Tt*), il en réſultera une autre fraction $\frac{2 \times AM \times Gg}{BZ}$ qui ſera auſſi comme ces mêmes inſtans. Donc $2 \times AM$ étant conſtante, ces inſtans, *dt* (*Tt*), qu'on a vû (*Solut.* 2. *art.* 2.) être entr'eux comme les trilignes hyperboliques élémentaires *POp* correſpondans, ſeront pareillement ici entr'eux comme les fractions $\frac{Gg}{BZ}$ ou $\frac{Gg}{Bz}$ correſpondantes; & conſéquemment auſſi (à cauſe de $Z\Upsilon . AM :: AB . BZ = \frac{AB \times AM}{Z\Upsilon}$. & de $AB \times AM$ conſtante) comme les $Z\Upsilon \times Gg$ correſpondans, ainſi que M. *Newton* l'a auſſi trouvé le Corol. 4. de la Prop. 8. citée à la fin de l'art. 3. du Corol. 19.

COROLLAIRE XXIV.

Si préſentement on ſuppoſe que l'axe tranſverſe, juſqu'ici arbitraire, de l'hyperbole $M\Upsilon\Phi$, ſoit $= AB\sqrt{2}$, en-ſorte qu'elle ait ici $AM = \frac{1}{2}AB$, il ſuit encore du Corol. 18. que l'eſpace ici parcouru pendant quelque tems AT que ce ſoit, en vertu de la peſanteur conſtante d'un corps qui tombe verticalement dans le milieu

ſuppoſé, ou plûtôt en vertu de ce que les réſiſtances de ce milieu, laiſſent de cette force à ce corps en chaque inſtant, eſt à l'eſpace que ce même corps parcourroit en même tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ d'une viteſſe uniforme égale à la plus grande AB que ſa peſanteur lui puiſſe donner (*Corol.* 2. & 14. malgré ces réſiſtances :: $AZ\Upsilon M . PAO$.

Car puiſque (*Corol.* 18. *nomb.* 2) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, l'on aura $2 \times AG . AB :: Zz . Gg$. ou (en multipliant les antecedens par $Z\Upsilon$, & les conſéquens par $\frac{1}{2} AO$) $2 \times AG \times Z\Upsilon . \frac{1}{2} AO \times AB :: Z\Upsilon \times Zz . \frac{1}{2} AO \times Gg :: Zzy\Upsilon . G0g$. Mais (*Corol.* 18. *nomb.* 1.) $BZ . AB :: G0g . P0p$. Donc (en multipliant par ordre) $Zzy\Upsilon . P0p :: 2 \times AG \times Z\Upsilon \times BZ . \frac{1}{2} AO \times AB \times AB$ (à cauſe de $AO = AB$) :: $AG \times Z\Upsilon \times BZ . \frac{1}{4} AB \times AB \times AB$ (à cauſe de $Z\Upsilon \times BZ = AM \times AB$) :: $AG \times AM . \frac{1}{4} AB \times AB$ (à cauſe qu'on ſuppoſe ici $AM = \frac{1}{4} AB$) :: $AG . AB$. C'eſt à dire les aires hyperboliques élémentaires $Zzy\Upsilon$, $P0p$, par tout entr'elles comme (*Solut.* 2. *art.* 3.) les viteſſes correſpondantes AG (u), AB (a). Donc les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes pendant un même inſtant quelconque Tt, étant entr'eux comme ces même viteſſes ; ces eſpaces ſeront pareillement ici entr'eux :: $Zzy\Upsilon . P0p$. Donc auſſi le premier de ces eſpaces parcouru de la viteſſe reſtante AG ou TU (u) pendant l'inſtant Tt, étant (*Corol.* 18. *nomb.* 3.) comme l'aire élémentaire hyperbolique $Zzy\Upsilon$, ſi l'on prend cette aire infiniment petite pour cet eſpace inſtantanée, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique $P0p$ correſpondant pour l'eſpace parcouru de la viteſſe AB

(*a*) pendant le même instant Tt; & par tout de même. Donc (en intégrant) l'espace parcouru de la viteſſe accélerée AG ou TU (*u*.) pendant le tems AT (t) malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'eſpace parcouru de la viteſſe terminale uniforme AB (*a*) pendant le même tems :: $AZYM. PAO$. Et par tout ici de même. Ce qu'il falloit démontrer ; & ce que M. *Newton* a auſſi démontré à ſa maniere dans ſes *Princ. Math.* Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. Corol. 1. pag. 259.

COROLLAIRE XXV.

Les deux derniers Corol. 23. & 24. ſont encore des ſuites preſque immédiates des Analyſes de la Solut. 1. & du Corol. 9. En effet

I. L'art. 2. de la Solut. 1. donnant $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$; l'on aura $dt = \frac{aadu}{aa-uu} = \frac{adu}{a-\frac{uu}{a}}$ (à cauſe de $du = Gg$, $a = AB$, $\frac{uu}{a} = AZ$, $a-\frac{uu}{a} = BZ$) $= \frac{AB \times Gg}{BZ}$: c'eſt à dire (à cauſe de AB conſtante) les inſtans dt (Tt) en raiſon des fractions $\frac{Gg}{BZ}$ correſpondantes, & conſéquemment auſſi (à cauſe de $ZY. AM :: AB . BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$, & de $AB \times AM$ conſtante) comme les $ZY \times Gg$ correſpondans, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 23.

II. En appellant les variables AZ, m; ZY, n;

la conſtante AM, c; & le reſte comme dans le Corol. 9. la ſuppoſition qu'on fait ici (*Corol.* 18.) de $AB\ (a).\ AG\ (u) :: AG\ (u).\ AZ\ (m)$. donnera ici $m = \frac{uu}{a}$, & $\frac{2acudu}{aa-uu} = ndm = ZzyY$, comme dans ce Corol. 9. De plus l'art. 2. de la Solut. 2. donne $POp = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$ (*Solut.* 2. *art.* 1.) $= \frac{1}{2} \times \frac{a^3du}{aa-uu}$. Donc $ZyzY.POp :: \frac{2acudu}{aa-uu}.$ $\frac{1}{2} \times \frac{a^3du}{aa-uu} :: 2cu.\ \frac{1}{2}aa.$ Donc en ſuppoſant ici $AM\ (c) = \frac{1}{4}AB\ (\frac{1}{4}a)$ comme dans le précédent Corol. 24. L'on y aura $ZzyY.POp :: u.a :: AG.AB.$ &c. ainſi que dans ce Corol. 24.

Voilà pour les mouvemens primitivement accelerez en raiſon des tems, en commençant à zero de viteſſe, dans des milieux qui leur réſiſteroient en raiſon des quarrez de leurs viteſſes effectives. On verra dans un autre Memoire ce qui devroit auſſi arriver dans ces milieux à des mouvemens commencez par des viteſſes quelconques, & enſuite accelerez de méme primitivement en raiſon des tems écoulez.

OB-

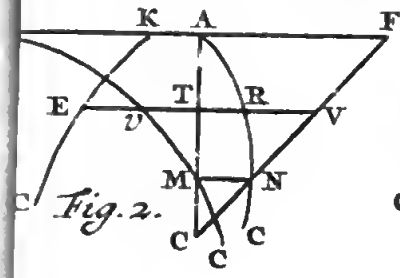


Fig. 2.

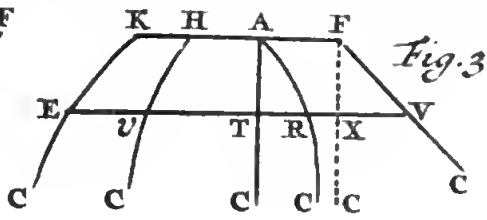
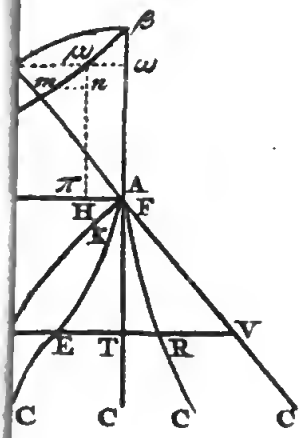


Fig. 3.



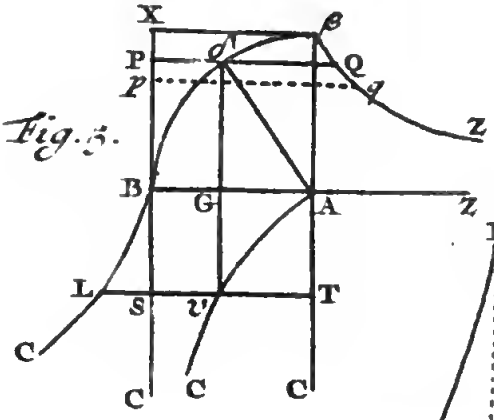


Fig. 5.

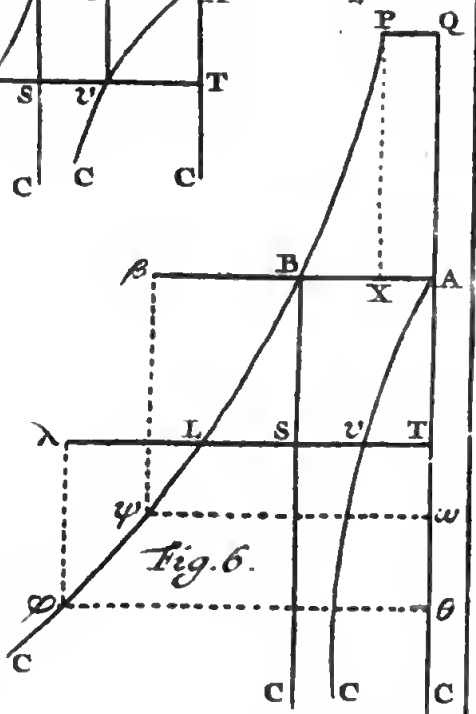
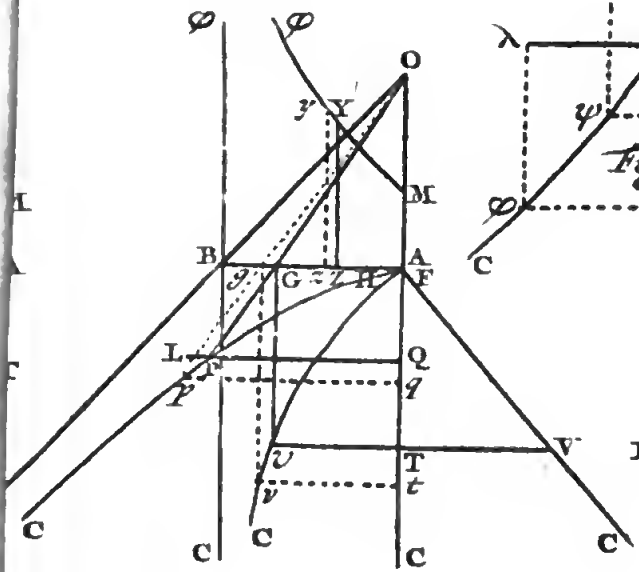


Fig. 6.

Fig. 8.



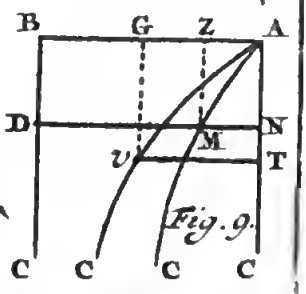


Fig. 9.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

OBSERVATIONS ET ANALYSES DU CACHOU.

PAR M. BOULDUC.

*LE Cachou eſt une drogue qu'on nous apporte des *Indes*. Nous ne le connoiſſons que ſuperficiellement, ſans avoir pû juſqu'à preſent ſavoir au vrai ce que c'eſt. L'on a d'abord voulu, au rapport de quelques Voiageurs, nous perſuader, que c'étoit une terre qui ſe trouvoit au *Japon*; ce qui a donné lieu à ceux qui ont écrit de la Matiere medicale, de le mettre dans la claſſe des Terres, ſous le nom de *Terra Japonica*, d'où ils ont prétendu qu'on la tiroit. Ceux qui depuis l'ont examiné de plus près & qui en ont écrit, ont avec raiſon refuté cette opinion. Ils ont prétendu que le Cachou étoit un ſuc épaiſſi d'une ou de pluſieurs plantes. Quelques recherches que j'aie faites juſqu'à preſent pour en découvrir la verité, je n'ai rien appris de plus que ce qui en eſt écrit dans les Ephemerides d'*Allemagne*, & ailleurs; car les uns veulent que ce ſoit l'extrait du ſuc d'une ſeule Plante; d'autres, de pluſieurs; & d'autres au contraire, que ce ſoit l'extrait du ſuc du fruit d'un grand arbre du même nom, qui croît en l'Iſle de *Sumatra*, d'où on l'apporte au *Japon*. Comme je ne puis

* 19. Juin 1709.

rien dire de nouveau ſur la nature du Cachou que ce que les Modernes en ont écrit, je ne m'étendrai pas davantage ſur ces differentes opinions, je m'en tiendrai à la plus probable.

Les experiences & les differentes analyſes que j'ai faites de ce mixte, me confirment que c'eſt un ſuc épaiſſi de vegetal, & de fait ſi c'étoit une terre, comme on l'a voulu dire d'abord, elle feroit comme toutes les autres terres un limon dans l'humidité, au lieu que le Cachou s'y diſſout entierement, à quelques parties groſſieres près, non-ſeulement dans les liqueurs aqueuſes, mais encore dans les ſpiritueuſes, comme je le vais dire.

Je ne croi pas, comme M. *Lemery* le dit dans ſon *Traité des Drogues*, qu'il y ait de deux ſortes de Cachou : Je demeurerai bien d'accord avec lui, que lorſqu'on le briſe en morceaux il s'en trouve de differentes couleurs & de differentes conſiſtences ; que les uns ſe trouvent en dedans d'un rouge-brun, luiſans & compactes, les autres au contraire ſe trouvent plus legers, d'un rouge pâle comme de couleur de chair ; ce dernier Cachou étant gratté avec l'ongle, ſe met aiſément en pouſſiere, & fait dans la bouche un limon très-deſagreable avant de s'y fondre ; ce que ne fait point l'autre, qui au contraire s'y étend & s'y diſſout peu à peu. Je crois plûtôt que cette difference vient ſeulement du défaut de préparation ; que dans l'un on a eu ſoin d'en bien dépurer les ſucs dont on le prépare, & d'en ſéparer exactement les réſidences, que nous appellons fécules, ce qu'on a négligé de faire à l'autre ; cette conſidération n'eſt pas de grande conſéquence ; car il eſt très-facile de choiſir le meilleur, qui eſt, com-

comme il le dit fort bien, le plus pesant, le plus luisant, & d'un rouge brun foncé.

Quant aux Analyses que j'en ai faites, je l'ai d'abord distillé à la cornuë au feu de reverbere clos, avec un intermede, pour faciliter l'élévation de ses principes ou des differentes parties qui le composent; car autrement étant un suc épaissi & par conséquent visqueux, il se gonfleroit seulement, se rarefieroit & casseroit les vaisseaux.

J'en ai tiré comme de semblables matieres, un peu de flegme, un esprit acide, beaucoup d'huile épaisse & brune en couleur, mêlée de quelques goutes d'esprit urineux, ce que j'ai remarqué par les essais ordinaires.

De quatre onces que j'avois mis dans la cornuë, le *caput mortuum* après la distillation ne s'est plus trouvé peser qu'un once, dont j'ai tiré après une forte calcination, douze grains de sel lixiviel.

Par cette distillation il est évident que le Cachou n'est point une terre mais un suc épaissi, on en sera encore plus certain par les differentes dissolutions que j'en vais raporter.

J'ai dissous quatre onces de Cachou bien conditionné dans 24 onces d'eau, à chaleur moderée, il m'a paru d'abord entierement dissous, hors quelques parties grossieres qui se trouvent assez souvent dans ces sortes d'extraits: la dissolution en étoit d'un très-beau rouge foncé & très-claire; l'aiant laissée reposer & refroidir, pour en separer les féces, j'ai été surpris de trouver cette dissolution prise en mussilage, d'un rouge couleur de chair, sans liaison, & qui paroissoit comme du bol très-fin, détrempé dans de l'eau; j'ai donc été obli-

obligé d'y ajoûter, ſur un feu moderé, une ſuffiſante quantité d'eau, pour en étendre davantage les parties; de cette maniere il ne s'eſt plus fait de coagulation ou très-peu, en ſorte que j'ai pû filtrer cette diſſolution par le papier gris: je l'ai enſuite évaporée à une chaleur très-lente en conſiſtence d'extrait auſſi ſec que l'eſt ordinairement le Cachou.

J'ai remarqué que du ſoir au matin cette diſſolution qui n'étoit encore qu'à demi évaporée, s'eſt encore coagulée comme elle l'avoit été la premiere fois; il n'y avoit donc que la grande quantité de liqueur qui tenoit cette diſſolution en fluëur; ce qui nous marque que les ſucs dont on fait cet extrait ſont ſans doute très viſqueux & très-muſſilaginenx, l'on pourroit croire auſſi que ce ſont les ſels eſſentiels qui ſont en abondance dans ce ſuc épaiſſi qui en condenſent ainſi le peu de parties reſineuſes qu'il contient, à meſure que la diſſolution ſe refroidit.

J'ai retiré de ces 4 onces de Cachou ainſi préparé deux onces trois dragmes d'extrait très-beau & bien ſec.

Je n'ai point trouvé cet extrait different au goût du Cachou ordinaire & tel qu'on nous l'apporte, ſi ce n'eſt que ce premier s'étend plus agréablement ſur la langue, qu'on n'y ſent point ſous la dent de gravier ou autres parties terreſtres, & qu'il eſt, ce me ſemble, plus agreable & moins acerbe.

Le reſidu de ces quatre onces de Cachou, que l'eau n'a pû diſſoudre, & qui probablement en étoit la partie reſineuſe & les terreſtreitez, ne s'eſt plus trouvé peſer qu'une once, dont j'ai tiré encore cinq dragmes d'extrait avec l'eſprit de vin rectifié.

Ce

Ce dernier extrait eſt beaucoup plus lié & plus onctueux que le premier, mais le goût en eſt bien moins délicat & plus âpre, ne laiſſant pas ſur la langue une douceur ſi agreable.

Les parties groſſieres de ces 4 onces de Cachou, que l'eau & l'eſprit de vin n'ont pû diſſoudre ſe ſont trouvées peſer deux dragmes, ſans aucune qualité, ſi ce n'eſt une legere impreſſion de ſtipticité.

J'ai encore diſſous quatre onces de Cachou naturel dans une ſuffiſante quantité d'eſprit de vin, comme en premier lieu, je l'avois diſſous avec l'eau: j'en ai verſé deſſus, autant, & autant de fois qu'il en a fallu pour en tirer toute la teinture par une chaleur moderée & en vaiſſeaux convenables, la teinture s'en eſt trouvée plus vive & d'un plus beau rouge que celle que j'avois faite & preparée avec l'eau; mais ce qu'il y a de particulier dans cette diſſolution faite avec l'eſprit de vin, c'eſt qu'il ne s'eſt point fait de coagulation, comme il s'en eſt fait avec l'eau, quoique je n'y aie emploié que peu d'eſprit en comparaiſon de la quantité d'eau que j'avois emploiée au premier extrait. Après en avoir retiré l'eſprit de vin par la diſtillation à la maniere ordinaire, les teintures préalablement bien filtrées & ſeparées de ce que l'eſprit de vin n'a pû diſſoudre, j'ai trouvé deux onces ſix dragmes d'un très-bel extrait, très-luiſant, mais qui ne peut ſe deſſeicher comme celui fait avec l'eau: auſſi eſt-il plus gras & plus onctueux, moins doux ſur la langue, beaucoup plus âpre, & très-deſagreable.

Le reſidu de ces quatre onces de Cachou que l'eſprit de vin n'a pû diſſoudre, s'eſt trouvé peſer neuf dragmes: ce reſidu étoit plus blan-

blanchâtre & plus décoloré que ne l'étoit celui dont j'avois tiré l'extrait avec l'eau.

J'ai encore tiré de ce reſidu avec ſuffiſante quantité d'eau cinq dragmes d'un extrait très-rude & mal lié, de très-peu de goût & deſagreable.

Nous voions par ces differentes diſſolutions que le Cachou ſe diſſout dans l'eſprit de vin auſſi bien que dans l'eau, même qu'il ſe diſſout dans l'eſprit de vin en plus grande quantité, puiſque je n'ai tiré par le diſſolvant aqueux que deux onces trois dragmes d'extrait, & qu'avec l'eſprit de vin j'en ai tiré deux onces ſix dragmes : auſſi ai-je remarqué que ce qui eſt reſté de Cachou après en avoir tiré la teinture avec l'eſprit de vin, étoit preſque ſans qualité, & l'autre au contraire.

Outre ces differentes diſſolutions, j'ai calciné dans un creuſet & à grand feu une once de Cachou, il s'y eſt gonflé, a beaucoup bouillonné & s'eſt enfin réduit en cendres griſes, au poids d'une dragme & demie, dont j'ai tiré par lexiviation quelques grains de ſel lexiviel qui a fermenté avec les acides.

Je finis mes obſervations ſur le Cachou, par deux remarques que j'ai faites ; la premiere eſt que le Cachou crud, bien choiſi & bien pur, tel qu'on nous l'apporte, eſt à préferer à toutes les differentes préparations qu'on a acoûtumé d'en faire ; & ſi quelque préparation lui peut convenir, la plus ſimple eſt la meilleure, qui eſt ſon entiere diſſolution dans l'eau, reduite enſuite en extrait bien ſolide, par le moien de laquelle on le purifie & on le ſepare de ſes parties terreſtres & indiſſolubles, & de quelques petits graviers qu'il renferme ordinairement

&

& qui fatiguent la dent lorſqu'on le mâche.

La ſeconde eſt, qu'outre les proprietez que ceux qui en ont écrit lui attribuent, il eſt encore ſpecifique & ſouverain pour tous les maux de gorge; l'uſage eſt d'en laiſſer fondre dans la bouche un morceau de la groſſeur d'un pois, le ſoir en ſe couchant.

Le Cachou ſe diſſout dans l'eau ſans ſe coaguler, ſi l'on joint à ſa diſſolution un peu de ſel de tartre ou de quelqu'autre ſel alkali, par ce moien les parties reſineuſes qu'il contient s'étendent & ſe joignent aux parties ſalines; mais cette addition eſt inutile, le Cachou renferme aſſez de parties ſalines pour étendre le peu de parties reſineuſes qu'il contient; il n'y a, pour éviter cette petite coagulation, qu'à couler la diſſolution encore chaude pour en ſeparer les parties terreſtres.

COMPARAISON DES OBSERVATIONS DU BAROMETRE

Faites en differens lieux.

PAR M. MARALDI.

* POUR parvenir à connoître la cauſe des Phénomenes que l'on remarque par le moien du Barometre, il ne ſuffit pas d'avoir des obſervations faites dans un ſeul endroit, il eſt

* 20. Juillet 1709.

eſt néceſſaire d'en faire auſſi en differens païs, comparer ces obſervations enſemble, remarquer ce qu'elles ont de conforme, & les differences qui s'y rencontrent.

Sans un grand nombre de ces obſervations on eſt ſujet à ſe tromper, en expliquant par des cauſes qui ne ſeroient propres qu'à un païs particulier, des phénomenes qui peuvent avoir des cauſes plus génerales; & on pourroit conſiderer comme une proprieté de toute la maſſe de l'air, ce qui ne lui convient que dans quelques circonſtances, ou dans une certaine étenduë de païs.

Pluſieurs Savans qui ont reconnu l'utilité qu'on pourroit tirer dans la Phyſique, des obſervations du Barometre, ſe ſont appliquez depuis quelque tems à les faire en differens païs. M. le Marquis *Salvago* m'aiant communiqué celles qu'il avoit faites à *Genes* depuis trois ans, je les ai comparées avec les nôtres qui ont été faites en même tems à l'Obſervatoire. Dans la comparaiſon de ces obſervations nous y en avons trouvé qui ont quelque choſe de particulier, & que j'ai crû devoir remarquer. Je rapporterai enſuite des experiences ſur la dilatation de l'air faites proche de l'équinoxial, que j'ai eu occaſion d'examiner.

Dans les obſervations que M. le Marquis *Salvago* a faites à *Genes* il s'eſt ſervi d'un Barometre ſimple diviſé en pouces & en lignes du pied de *Paris*. Ce Barometre eſt ſitué dans un appartement où le mercure ſe tient une ligne plus bas qu'au bord de la mer, ainſi qu'il a été trouvé par l'obſervation, de ſorte que ſi on veut réduire au niveau de la mer les obſervations de *Genes*, il faudra ajoûter une ligne à cha-

chaque hauteur du mercure que je rapporterai dans la ſuite.

Dans le rapport de ces obſervations on ne ſuivra pas l'ordre du tems dans lequel elles ont été faites; mais je commencerai par les plus remarquables.

L'an 1707 à *Paris* depuis le 15 Novembre juſqu'au 18, le Barometre reſta pendant quatre jours à la hauteur de 28 pouces à une demi-ligne près; le jour ſuivant 19 Novembre il deſcendit à 27 pouces 4 lignes, aiant baiſſé 8 lignes en 24 heures; le jour ſuivant il s'éleva de nouveau de dix lignes, s'étant trouvé le 20 Novembre à 28 pouces 2 lignes; pendant cette variation la conſtitution de l'air n'a point changé, le ciel aiant été tranquille & ſerein.

La même année 1707 à *Genes* depuis le 15 Novembre juſqu'au 18, le mercure reſta à la hauteur de 28 pouces un peu plus, comme il avoit été les mêmes jours à *Paris*. Le jour ſuivant 19 Novembre à *Genes* le vent étant Sud, le Barometre étoit deſcendu à 27 pouces 5 lignes, aiant baiſſé en un jour de 7 lignes à *Genes* à peu près comme il fit le même jour à *Paris*. Il ne reſta que ce jour-là dans la même ſituation; mais il s'éleva de nouveau le jour ſuivant à 28 pouces, & le 21 à 28 pouces 2 lignes, comme il étoit arrivé à *Paris*, le vent étoit tourné au Nord.

La même année 1707 depuis le 20 Novembre juſqu'au 28, le Barometre reſta à *Genes* & à *Paris* preſque toûjours à 28 pouces une ligne. Pendant ces huit jours à *Paris* le vent a été quelquefois à l'Oueſt & quelquefois au Nord-Oueſt; à *Genes* le vent étoit toûjours Nord.

Le 30 Novembre à *Paris* le Barometre baiſ-

ſa

ſa à 27 pouces 0 lignes, le vent étant Nord-Oueſt. Le premier Decembre il s'éleva de nouveau à 27 pouces 10 lignes, le vent étant Oueſt & le ciel ſerein; le jour ſuivant il s'éleva encore de deux lignes aiant été à 28 pouces; de ſorte que à *Paris* depuis le 28 Novembre juſqu'au 30 il baiſſa en deux jours de plus d'un pouce; & du 30 Novembre au premier Decembre en 24 heures il s'éleva de 10 lignes.

Les mêmes variations à peu près ſont auſſi arrivées à *Genes* dans les mêmes jours. Par les obſervations de M le Marquis *Salvago* depuis le 28 Novembre que le Barometre étoit à 28 pouces une ligne, il deſcendit le 30 à 27 pouces 4 lignes, aiant baiſſé de 9 lignes en deux jours, le vent étant Nord-Eſt; le jour ſuivant il s'éleva de 5 à 6 lignes un peu moins de ce qu'il avoit fait le même jour à *Paris*.

On voit par ces obſervations, qu'il arrive en peu de tems de grandes variations dans la hauteur du Barometre tant à *Paris* qu'à *Genes*, & qu'il y a une grande conformité dans ces variations qui ſont arrivées en même tems en des païs auſſi éloignez. On voit auſſi qu'elles n'ont pas beaucoup de rapport avec les changemens des vents; car les variations du Barometre qui arriverent du 19 au 20 Novembre, ſe firent à *Paris* ſans aucun changement remarquable de vent, & ſi ce jour-là le Barometre baiſſa à *Genes* par un vent de Sud-Eſt, & s'éleva par un vent de Nord; dans la variation qui arriva le 28, le Mercure y baiſſa par le Nord-Eſt, vent qui pour l'ordinaire le fait monter. De même à *Paris* le Barometre y baiſſa par un vent de Nord-Oueſt, & s'éleva par un vent d'Oueſt par lequel il a coûtume de baiſſer. Mais quelle rapidité

dité ne faudroit-il pas donner aux vents pour cauſer en même temps des changemens ſi prompts en des villes auſſi éloignées?

Ce n'eſt pas ſeulement dans ces variations ſubites & qui arrivent fort rarement, que l'on trouve cette conformité; il y a encore le même accord dans les changemens du Barometre qui ſe font plus lentement, & qui arrivent en ces deux villes pendant toute l'année.

Comme il ſeroit long de rapporter toutes les obſervations faites pendant les trois dernieres années dans leſquelles on trouve cet accord, j'ai fait un choix des plus remarquables.

L'an 1706.	*Barometre.*	*Vens.*	*Barom.*	*Vens.*
Le 1 Janvier	à *Paris* 27 0	Sud.	à *Genes* 27 3	
Le 7 Janvier	à *Paris* 28 0	tranquille.	à *Genes* 28 0½	Nord.

Depuis le 1 Janvier juſqu'au 7 dans l'intervalle de ſix jours le mercure s'éleva de 12 lignes à *Paris*, & de 9 & demi à *Genes*.

Le 13 Fevrier	à *Paris* 27 3	Sud.	à *Genes* 27 5	Sud-Eſt.
Le 19 Fevrier	à *Paris* 28 1	tranquille.	à *Genes* 27 11½	Nord.

Depuis le 13 juſqu'au 19 en ſix jours le Barometre s'eſt élevé de 10 lignes à *Paris*, à *Genes* de ſix.

Le

Le 31 Octobre	à *Paris*	28	0	tranquille.	à *Genes*	28	0	tranquille.
Le 4 Novembre	à *Paris*	26	9	Sud-Eſt pluïe.	à *Genes*	27	1	Sud-Oueſt.
Le 20 Novembre	à *Paris*	27	11	Sud.	à *Genes*	28	1	Nord.

Par les obſervations du 31 Octobre & du 4 Novembre en 4 jours le Barometre baiſſa à *Paris* de 13 lignes; il baiſſa dans le même tems à *Genes* de 11 lignes, quoique les vens fuſſent differens. Le 20 Novembre le Barometre s'étoit élevé à une grande hauteur, étant la même à deux lignes près en ces deux villes, quoique le vent fût Sud à *Paris*, & Nord à *Genes*.

Le 10 Decembre	à *Paris*	28	1	tranquille.	à *Genes*	28	4	Nord.
Le 15 Decembre	à *Paris*	27	1	Oueſt.	à *Genes*	27	5	Sud-Eſt.

Par ces obſervations le Barometre baiſſa en cinq jours environ un pouce à *Paris* & à *Genes*.

L'an 1707.

Le 13 Mars	à *Paris*	27	11	Oueſt.	à *Genes*	28	0	Nord.
Le 17 Mars	à *Paris*	27	5	Nord-Eſt.	à *Genes*	27	8	Sud-Eſt.

En quatre jours le Barometre baiſſa de 6 lignes à *Paris*, & de 4 à *Genes*, quoique le vent fût fort different.

Le

Le 20 Juillet	à *Paris*	27	11	Sud foible.	à *Genes*	28	0	Nord foible.
Le 24 Juillet	à *Paris*	27	4½	Nord-Oueſt.	à *Genes*	27	6	Sud-Eſt.

Le 20 Juillet les vens étant oppoſez à *Paris* & à *Genes* le Barometre s'y trouva preſque également élevé; il baiſſa enſuite de ſix lignes de part & d'autre en quatre jours, les vens aiant changé & étant encore oppoſez, c'eſt-à-dire, Nord-Oueſt à *Paris*, & Sud-Eſt à *Genes*.

Le 22 Decembre	à *Paris*	27	10	Sud-Oueſt.	à *Genes*	28	0	Sud-Eſt.
Le 27 Decembre	à *Paris*	27	2	tranquille.	à *Genes*	27	2	Nord-Eſt.

En cinq jours le Barometre baiſſa de 8 lignes à *Paris*, & de 10 à *Genes*.

L'an 1708.	*Barometre*		*Vent.*		*Barom.*		*Vent.*
Le 11 Janvier	à *Paris*	26	10	tranq. ſerein.	à *Genes*	27	3	Sud-Oueſt couv.
Le 17 Janvier	à *Paris*	27	8	Sud-Oueſt.	à *Genes*	27	11	Sud-Eſt ſerein.

Le Barometre s'éleva en ſix jours à *Paris* de 10 lignes, à *Genes* de 8, les vents étant fort differens en ces deux Villes.

Le 6 Fevrier	à *Paris*	27	2¾	Oueſt.	à *Genes*	27	6⅓	Nord.
Le 10 Fevrier	à *Paris*	27	10	tranquille.	à *Genes*	28	0	Nord.

Par ces obſervations le Barometre s'éleva de ſix lignes en ces deux Villes, à *Paris* le vent aiant été variable, à *Genes* il étoit toûjours Nord.

Le 20 Mars	à *Paris*	27	8 $\frac{3}{4}$	tranq. ſerein.	à *Genes*	25	7	tranquille.
Le 22 Mars	à *Paris*	27	2	Nord.	à *Genes*	27	3 $\frac{1}{3}$	Nord.

Le Barometre étant à une hauteur moienne baiſſa en deux jours de ſix lignes à *Paris*, de quatre à *Genes* par un vent de Nord qu'il faiſoit en ces deux villes.

Le 8 Mai	à *Paris*	27	11		à *Genes*	28	0	Nord.
Le 17 Mai	à *Paris*	27	4	Sud-Oueſt.	à *Genes*	27	5 $\frac{3}{4}$	Sud-Eſt.
Le 19 Novembre	à *Paris*	28	2 $\frac{1}{2}$	tranquille.	à *Genes*	28	2	tranquille.
Le 23 Novembre	à *Paris*	27	6	Nord-Oueſt.	Le 24 à *G.*	27	5	pluie.
Le 24 Novembre	à *Paris*	27	11 $\frac{3}{4}$	Nord-Oueſt.	Le 25 à *G.*	27	10	Nord.

Le 19 le Barometre étant à une grande hauteur, baiſſa enſuite juſqu'au 23, & du 23 au 24 il s'éleva de ſix lignes en un jour. Mais à *Genes* il ne fit cette variation qu'un jour après qu'elle arriva à *Paris*.

Le 10 Decembre	à *Paris*	27	11 $\frac{1}{2}$	tranquille.	à *Genes*	27	11	Nord.
Le 15 Decembre	à *Paris*	27	1	pluie.	à *Genes*	27	5	pluie.

Par

Par toutes ces obſervations & par beaucoup d'autres que je ne raporte point, il eſt conſtant qu'il y a un grand accord dans les variations qui arrivent en même tems au Barometre à *Paris* & à *Genes*, ſoit que ces changemens ſoient prompts & ſubits comme ceux qui ont été rapportez les premiers, ſoit que ces changemens ſe faſſent plus lentement comme ces derniers.

Cette correſpondance des changemens du Barometre paroît n'avoir pas beaucoup de rapport avec la conſtitution de l'air, ni avec les vents qui regnent en même tems en differens païs; car le mercure s'éleve à *Genes* lorſqu'il s'éleve à *Paris*; & il baiſſe de même, ſoit qu'en ces deux Villes il y ait la même conſtitution d'air ou qu'il y regne le même vent, ce qui eſt fort rare; ſoit que l'un & l'autre ſoient differens. Ce ſeroit une choſe digne d'être examinée par des obſervations faites en des lieux fort éloignez, juſqu'à quelle diſtance ſe trouve une telle conformité des variations du Barometre.

Cette longue ſuite d'obſervations de *Paris* & de *Genes* comparées enſemble, fait connoître que pour trouver la hauteur des Montagnes par les experiences du Barometre faites en même tems en differens endroits de la maniere qui a été propoſée dans les Memoires de l'Academie, il faut ſe ſervir de celles où le mercure ſe tient dans le Barometre à une hauteur moienne, & préferer celles-ci aux autres dans leſquelles le mercure ſe trouve proche des plus grandes & des plus petites élevations, parce que dans les hauteurs moiennes du mercure les differences entre differens païs ſont plus uniformes.

Par la comparaiſon des obſervations faites avec ce choix, on trouve entre *Paris* & *Genes*

une difference de trois lignes de hauteur de mercure dont il se tient plus élevé à *Genes* qu'à *Paris*; & puisque dans les observations de *Genes* le Barometre est une ligne plus bas qu'il ne seroit au bord de la mer, il résulte une difference de 4 lignes de mercure entre les observations de *Paris* & celles qui auroient été faites à *Genes* au bord de la mer. Cette difference entre le niveau de la mer de *Genes* & *Paris*, s'accorde avec celle qui a été concluë par les observations de *Paris* & de *Collioure*, rapportées dans les Memoires de l'Academie du mois de Novembre 1703. pag. 274.

Il a été remarqué dans ce Memoire, que les differences qui arrivent au Barometre dans un même lieu entre la plus grande & la plus petite élevation, sont plus grandes dans les païs Septentrionaux que dans les Meridionaux où ces differences vont en diminuant; de sorte que vers l'Equinoxial elles se réduisent à peu de chose.

Plusieurs observations que nous avons reçuës depuis ce tems-là de divers endroits, sont conformes à cette remarque. A *Upminster* en *Angleterre* qui est plus Septentrional que *Paris*, les variations du Barometre y sont aussi plus grandes qu'à *Paris*; celles de *Paris* sont plus grandes qu'à *Genes*, & les variations observées à *Genes* sont aussi plus grandes que celles qui résultent des observations du P. *Laval* faites l'année derniere à *Marseille* qui est plus meridionale que *Genes*.

Cette remarque qui est confirmée par un grand nombre d'observations faites en même tems en differens endroits, ne se vérifie pas à l'égard des observations faites par M. *Scheuchzer* à *Zuric*

ces

ces trois dernieres années ; car quoique *Zuric* ſoit beaucoup plus Septentrional que *Genes*, les variations ont été obſervées un peu plus petites à *Zuric*, bien loin d'y avoir été plus grandes qu'à *Genes*. L'an 1706 la difference entre la plus grande & la plus petite élevation du Barometre, a été à *Zuric* de 10 lignes. A *Genes* la même année cette difference fut d'un pouce & une ligne. L'an 1707 à *Zuric* elle réſulte de 11 lignes, à *Genes* elle fut d'un pouce. L'an 1708 par les obſervations faites à *Zuric* avec le Barometre droit que je crois préferable au Barometre incliné, la variation ſe trouva de 10 lignes, à *Genes* un pouce, à *Marſeille* de 10 lignes & demi comme à *Zuric*.

Il faut remarquer que les lieux des obſervations où cette régle ſe trouve, ſont ſituez à des hauteurs peu differentes les unes des autres, & ſont peu élevez ſur la ſurface de la mer, ainſi qu'il paroît par la difference des hauteurs du Barometre qui ſe trouve entre ces obſervations, & à l'égard de celles qui ont été faites proche le niveau de la mer. Mais il n'en eſt pas de même des obſervations de *Zuric* dont les obſervations ne ſont pas conformes à cette régle. Car par les obſervations faites pendant toute l'année 1708 à *Genes* & à *Zuric* & comparées enſemble, on trouve entre le niveau de la mer & *Zuric* une difference d'un pouce & 8 lignes de mercure ; ce qui fait voir que le lieu des obſervations de *Zuric* eſt fort élevé au deſſus des lieux des autres obſervations, & encore plus ſur le niveau de la mer.

Cette variation du Barometre moindre dans les lieux élevez que dans les lieux bas, eſt auſſi confirmée par des obſervations que le P. *Laval*

Jesuite envoia l'année derniere à l'Academie; car aiant fait pendant dix jours de suite les observations du Barometre sur la montagne du *S. Pilon* qui est plus Septentrionale de deux minutes de degré que *Marseille*, & qui est élevée sur le niveau de la mer d'environ 480 toises; les aiant comparées avec celles qu'on faisoit en même tems à l'Observatoire de *Marseille*, il trouva qu'à *Marseille* le Barometre y varia de deux lignes & trois quarts, lorsqu'il ne varia qu'une ligne & trois quarts au *S. Pilon*.

Le P. *Laval* attribuë cette difference, partie à la chaleur qui est moins grande dans les lieux élevez que dans les lieux bas, partie à la nature de l'air qui dans les lieux élevez étant plus rarefié, est moins sujet aux alterations qui contribuent à sa pesanteur ou à sa legereté.

On pourroit supposer que c'est quelque matiere hétérogene repanduë dans l'air, qui cause une partie de ces variations & qui fait un plus grand effet dans l'air inferieur que dans le superieur.

Aiant comparé ensemble les experiences du Barometre faites jusqu'à present en diverses parties de la Terre pendant toute l'année, j'ai reconnu que les variations du Barometre observées à *Zuric*, approchent beaucoup plus des variations observées proche de l'Equinoxial, que ne font les autres faites jusqu'à present en *Europe*.

J'ai examiné par cette occasion diverses experiences faites près de l'Exquinoxial sur la dilatation de l'air, pour voir si l'air de ce climat en se dilatant suivoit la raison reciproque des poids dont il est déchargé, suivant la régle de M. *Mariotte*.

Ces

Ces experiences ont été faites à *Malaque* par le P. de *Beze* Jeſuite, durant un ſéjour de ſept mois qu'il fit dans la même ville, qui quoique ſitué à deux degrez de Latitude Septentrionale, jouït, ſuivant le rapport du même Pere, d'un air aſſez temperé pour le climat, la chaleur y étant moderée & preſque toûjours la même.

Ces experiences ſont rapportées parmi les Obſervations Phyſiques & Mathematiques imprimées l'an 1692. avec des Notes du P. *Gouye* en ces termes:

„ Un habile Phyſicien me dit avant mon dé-
„ part de *France*, qu'on l'avoit aſſûré qu'il ne
„ ſe trouvoit pas de difference ſenſible au Ba-
„ rometre dans tous les lieux qui ſont ſituez
„ entre les Tropiques, pourvû que l'obſerva-
„ tion ſe fît dans un lieu de niveau de la mer.
„ Je voulus lorſque je fus arrivé aux *Indes*
„ m'aſſurer moi-même ſi ce qu'on lui avoit dit
„ étoit vrai; & comme je n'avois pas de Ba-
„ rometre monté, je me ſervis d'un tube de
„ verre long de 29 pouces, ſcellé hermetique-
„ ment, & exactement diviſé en pouces & en
„ lignes, avec lequel je fis l'experience de *To-*
„ *ricelli* en divers lieux entre les Tropiques;
„ mais j'ai partout trouvé une difference aſſez
„ ſenſible dans l'élevation du mercure, non-
„ ſeulement par rapport aux differens endroits
„ où j'ai obſervé, mais ſouvent auſſi dans un
„ même lieu où le vif-argent étoit plus ou
„ moins élevé ſuivant les diverſes diſpoſitions
„ de l'air; quoiqu'à dire le vrai cette difference
„ n'égale pas celle qu'on trouve hors des Tro-
„ piques, puiſque ſuivant ce que j'en ai pû ob-
„ ſerver, elle n'excede pas 5 ou 6 lignes.

„ J'ai déja envoié en *France* les experiences

„ que j'avois faites ſur ce ſujet à *Siam* & à „ *Pondicheri*. Voici celles que nous avons faites à *Malaque* & à *Batavia*.

„ Aiant choiſi à *Malaque* un jour où l'air paroiſſoit fort pur & le ciel n'étoit chargé d'aucuns nuages, pour faire l'experience : nous trouvâmes que le mercure du Tube ſe ſoûtenoit conſtamment à la hauteur de 26 pouces 6 lignes au deſſus de la ſurface de celui qui étoit dans le baſſin.

„ La chaleur étoit pour lors aſſez grande pour le climat, & le Thermometre étoit à 69. degrez.

„ Comme j'ai remarqué par pluſieurs experiences, que le mercure ſe ſoûtenoit ordinairement à une plus grande élevation lorſque la chaleur étoit moins grande, & qu'il deſcendoit au contraire lorſque la chaleur augmentoit, quoique le Ciel fût également ſerein & découvert, j'ai crû qu'il ſeroit bon de marquer en faiſant l'obſervation du Barometre, les degrez du Thermometre, quoiqu'il n'y ait pas une exacte proportion entre l'un & l'autre.

„ Voulant enſuite éprouver la force élaſtique de l'air, on a laiſſé trois pouces d'air en haut du tube, & l'aiant renverſé dans le vif-argent où il enfonçoit de 7 lignes, celui du tube eſt reſté à la hauteur de 20 pouces 7 lignes au deſſus de la ſuperficie de l'autre ; & l'air dilaté a occupé 7 pouces 10 lignes.

„ Aiant laiſſé après cela 7 pouces 6 lignes d'air, le mercure eſt reſté à la hauteur de 16 pouces, & l'air dilaté occupoit 12 pouces 5 lignes.

En conſiderant ces obſervations, il eſt aiſé de

de voir qu'elles ne ſuivent pas la regle de M. *Mariotte* ; car dans la premiere experience 7 pouces 10 lignes d'air dilaté après le renverſement du tuyau, à 3 pouces d'air naturel avant le renverſement, n'a pas la même proportion que 26 pouces 6 lignes de mercure dans le vuide, à 5 pouces 5 lignes excès de 26 pouces 6 lignes à 20 pouces 7 lignes, hauteur qu'avoit le mercure avec l'air dilaté, comme il devoit être ſuivant la regle. Il en eſt de même de la ſeconde experience ; mais dans ces deux experiences la proportion de l'air dilaté à l'air naturel eſt moindre que l'atmoſphere, à la difference entre la hauteur du mercure dans le vuide & la hauteur du mercure avec l'air dilaté.

Aiant calculé ces deux experiences pour connoître quelle devoit être la dilatation de l'air par la regle ordinaire, dans la premiere où l'air naturel étoit de trois pouces, après le renverſement l'air dilaté devoit occuper ſuivant la regle 9 pouces 11 lignes ; mais par l'experience il n'occupoit que 7 pouces 10 lignes ; la difference entre l'experience & la regle eſt deux pouces & une ligne, dont l'eſpace occupé par l'air dilaté étoit moindre.

Dans la ſeconde experience, 7 pouces & ſix lignes d'air naturel après le renverſement devoit ſe dilater & remplir ſuivant la regle l'eſpace de 15 pouces 1 ligne ; mais par l'obſervation il n'en occupoit que 12 pouces & 5 lignes ; la difference entre l'obſervation & la regle eſt deux pouces 8 lignes, dont l'obſervation eſt moindre, & par conſéquent ſuivant ces experiences l'air de *Malaque* ne ſuit pas la regle & ſe dilate moins que celui de l'*Europe*.

Outre ces experiences faites dans un tems que

l'air étoit pur & ſerein, le P. de *Beze* en fit encore d'autres pendant que le Ciel étoit moins pur & fort couvert des nuages, & que la hauteur du mercure dans le vuide étoit plus grande que dans les obſervations précedentes.

Voici comment elles ſont rapportées à la ſuite des premieres.

„ A la fin de la Lune le Ciel étant fort couvert, & l'air moins pur qu'à l'ordinaire, je „ réïterai ces experiences dans le même lieu, „ le Thermometre étoit à 63 degrez.

„ Aiant rempli le Tube de mercure & l'aiant „ renverſé dans celui du baſſin où il enfonçoit „ d'un pouce, il ſe ſoûtint à la hauteur de 26 „ pouces 10 lignes, & un quart au deſſus de la „ ſurface du vif-argent.

„ Aiant mis enſuite du mercure dans le Tube juſqu'à la hauteur de 26 pouces, afin qu'il „ reſtât 3 pouces d'air l'aiant plongé dans le „ mercure, l'air ſe dilatant a occupé 7 pouces „ 5 lignes & demi, & le vif-argent 20 pouces „ 6 lignes & demi.

„ Aiant laiſſé 6 pouces d'air le mercure s'eſt „ ſoutenu à la hauteur de 17 pouces 2 lignes & „ un quart, & l'air dilaté a rempli le reſte de „ l'eſpace 10 pouces 9 lignes & trois quarts.

„ Aiant laiſſé 9 pouces d'air le mercure n'a „ occupé que 14 pouces 6 lignes, & l'air dilaté „ 13 pouces 6 lignes. Ces experiences ont été „ faites dans un lieu élevé de 15 ou 20 pieds „ perpendiculaires au deſſus du niveau de la „ mer.

Par la comparaiſon que nous avons faite de ces obſervations avec la regle, on trouve entre l'une & l'autre les mêmes differences que dans les obſervations précedentes; car les trois pouces

ces d'air naturel après le renverſement s'eſt dilaté de ſorte qu'il occupoit ſeulement 7 pouces 5 lignes & demi, au lieu que par la regle il devoit contenir un eſpace de 9 lignes & demi. La difference entre l'obſervation & la regle eſt deux pouces une ligne & demi, à une demi-ligne près de ce qui s'eſt trouvé dans la premiere des experiences précedentes, ce qui marque la préciſion des unes & des autres.

Dans la ſeconde experience, ſix pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau, après le renverſement remplit l'eſpace de 10 pouces 9 lignes & trois quarts; cet eſpace par le calcul fondé ſur la regle, devoit être 13 pouces 3 lignes. La difference eſt deux pouces 5 lignes & trois quarts, dont la dilatation ſe trouve moindre par l'obſervation que par la regle.

Dans la derniere experience, 9 pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau s'étant dilaté par le renverſement, occupoit 13 pouces 6 lignes, & par le calcul fondé ſur la regle, il devoit remplir 16 pouces 1 ligne & un quart. La difference eſt deux pouces ſept lignes & un quart, dont l'experience donne moins que la regle.

Il eſt donc conſtant par toutes les experiences du P. de *Beze*, que la dilatation de l'air qui en réſulte, eſt beaucoup plus petite que celle de nôtre air, & qu'elle ne ſuit pas la proportion qu'on trouve par les experiences d'*Europe*.

On pourroit ſuppoſer que ce phénomene vient de la conſtitution particuliere de l'air de *Malaque*, qui étant fort rarefié par la chaleur du climat, eſt enſuite moins ſuſceptible d'une auſſi grande dilatation que le nôtre; mais autant qu'on en peut juger par des experiences faites en *Europe*, cette ſeule explication n'eſt pas ſuffiſante

fisante pour rendre raison de la grande difference qui se trouve entre la dilatation de nôtre air & celui de *Malaque*, quand même on supposeroit que la chaleur qui causeroit cette rarefaction est aussi grande que celle de l'eau bouillante. Voici les observations que nous avons faites.

J'ai pris un tuyau long de 38 pouces dans lequel j'ai mis du mercure jusqu'à la hauteur de 35 pouces, de sorte qu'il restoit 3 pouces d'air; j'ai plongé tout ce tuyau dans l'eau bouillante pour faire rarefier l'air qui y étoit contenu; j'ai bouché ensuite avec le doigt l'ouverture, & aiant retiré le tuyau de l'eau, je l'ai renversé dans le vif-argent; ensorte qu'il y enfonçoit d'un pouce. Immédiatement après le renversement le mercure se tenoit à peu de lignes près où il se tient par la seule dilatation sans l'avoir rarefié. Mais on voioit monter le mercure dans le tuyau, à mesure que l'air se condensoit en se refroidissant; & lorsqu'il a été entierement refroidi, le mercure est monté un pouce & deux lignes plus qu'il n'étoit immediatement après le renversement, & plus que ne demandoit la regle de M. *Mariotte*, & par conséquent l'air rarefié étoit moins dilaté que par la regle de la même quantité d'un pouce & deux lignes. Nous avons trouvé par les experiences de *Malaque* que les trois pouces d'air se sont dilatez deux pouces & une ligne moins que la regle; l'air de *Malaque* se dilate donc moins que nôtre air rarefié par la chaleur de l'eau bouillante.

J'ai fait la même experience sur six pouces, ensuite sur 9 pouces d'air, & j'ai toûjours trouvé que nôtre air rarefié par la chaleur, se dila-

toit

toit beaucoup moins que l'air de *Malaque*, & que la difference qui s'y trouve à l'égard de la regle, eſt le double plus grande dans l'air de *Malaque* que dans le nôtre rarefié. D'où l'on peut inferer que cette moindre dilatation de l'air de *Malaque* ne vient pas ſeulement des grandes chaleurs du climat, mais de ſa nature moins propre à ſe dilater que le nôtre.

Puiſque l'air ſe dilate autrement à *Malaque* qu'il ne fait en *France* à pareille hauteur à peu près de la ſurface de la mer, & qu'en *France* à de grandes hauteurs la dilatation ſe trouve differente de celle qui arrive à l'air inferieur, ainſi qu'il réſulte des obſervations faites ſur les Montagnes d'*Auvergne* & du *Rouſſillon*, on peut inferer, que toute la maſſe de l'air n'a pas la proprieté de ſe dilater ſuivant la raiſon des poids. On peut auſſi inferer de ces differentes dilatations, que l'air eſt hétérogene dans ces differentes parties, & qu'ainſi on doit être circonſpect à fonder un ſyſtême general ſur des experiences particulieres, quelque ſûres & quelque nombreuſes que ſoient ces experiences.

Il faut remarquer qu'en *Cayenne*, dont le parallele n'eſt éloigné de celui de *Malaque* que de deux degrez & demi vers le Septentrion, les réfractions des Aſtres ont été trouvées plus petites qu'en *Europe*. Ce ſeroit une choſe à examiner, s'il ſe trouve quelque rapport entre la maniere dont l'air ſe dilate ſous divers climats, & les differentes réfractions des objets céleſtes qu'on obſerve à des hauteurs égales ſur la ſurface de la mer.

DU MOUVEMENT APPARENT DES PLANETES

à l'égard de la Terre.

PAR M. CASSINI.

* L'ASTRONOMIE ancienne avoit trouvé des méthodes pour repreſenter aſſez exactement les longitudes apparentes des Planetes & leurs latitudes. Elle les donnoit calculées jour par jour dans les Ephemerides ordinaires ; mais elle n'avoit pas trouvé la maniere de repreſenter la proportion de la veritable diſtance de diverſes Planetes à la Terre. Les premiers Aſtronomes ſe ſervoient de certaines hypothêſes que l'on a depuis trouvé en partie évidemment fauſſes, d'autant qu'ils plaçoient les Planetes ſur des orbes à diverſes diſtances de la Terre ſans qu'aucune des Planetes ſuperieures pût jamais approcher de la Terre autant que ſon inferieure.

Ils voioient qu'une même Planete tantôt augmentoit, tantôt diminuoit en grandeur apparente, ce qu'ils jugeoient dépendre uniquement de ſa diverſe diſtance à l'égard de la Terre, & ils inventerent des hypothêſes par leſquelles ils repreſentoient la proportion de la va-

* 7. Août 1709.

variation de la distance de la même Planete à la Terre en divers temps.

Ils avoient distingué les mouvemens de la même Planete en periodiques & synodiques. Les mouvemens Periodiques des Planetes superieures étoient representez par un cercle Excentrique à la Terre, sur la circonference duquel on mettoit le centre d'un Epicycle mobile du mouvement Periodique ; de sorte que le centre de l'Epicycle de Saturne, par exemple, parcouroit son Excentrique en trente ans, celui de Jupiter en douze, celui de Mars en près de deux ans, pendant que la Planete parcouroit la circonference de l'Epicycle par un mouvement Synodique beaucoup plus vite. Ainsi la Planete s'approchoit & s'éloignoit de la Terre par la composition de ces deux mouvemens. Dans la proportion des distances de diverses Planetes, ils mettoient la Lune la plus proche de la Terre, & déterminoient sa plus grande distance de la Terre par l'observation de sa parallaxe qui est alors un peu moindre d'un degré.

Aiant déterminé par cette maniere la plus grande distance de la Lune à la Terre & consideré que les autres Planetes n'avoient pas une si grande parallaxe, & que leur mouvement étoit plus lent que celui de la Lune, ils jugerent que plus le mouvement d'une Planete est lent à l'égard des autres, & plus elle étoit éloignée de la Terre, & supposerent que la plus petite distance de la Planete superieure, n'excedoit que très-peu la plus grande distance de son inferieure ; aiant calculé dans la même Planete la proportion de la plus petite distance à la plus grande qui résultoit de la composition du mou-

mouvement Periodique & Synodique, ils donnoient à l'orbe de la Planete toute l'épaiſſeur que cette compoſition demandoit. Par cette maniere ils placerent Mercure immediatement au deſſus de la Lune, parce que ſon mouvement propre leur parut plus vite que celui des autres Planetes: ils placerent de même Venus au deſſus de Mercure.

Ils obſerverent que Mercure & Venus avoient le centre de leur Epicycle ſur une ligne, qui étant tirée du centre de la Terre paſſoit auſſi près du centre du Soleil d'où Mercure pouvoit s'éloigner de part & d'autre de près de 28 degrez & Venus de près de 48.

Ils obſerverent auſſi que Mars, Jupiter & Saturne s'éloignoient du Soleil juſqu'à l'oppoſition; & *Ptolemée* ne trouva rien de plus raiſonnable que de ſuppoſer l'orbe du Soleil placé au milieu entre les Planetes qui ne s'en peuvent éloigner qu'à certaine diſtance, comme ſont Mercure & Venus, & celles qui peuvent s'en éloigner à toute ſorte de diſtance qui furent appellées les Planetes ſuperieures. Ils donnoient à Mercure & à Venus un mouvement apparent Periodique ſur leur excentrique, peu differents du mouvement apparent du Soleil, pendant que ces Planetes parcouroient leurs Epicycles par des mouvemens fort differens entre eux.

Copernic ſuppoſa le Soleil fixe & ſubſtitua au mouvement annuel du Soleil le mouvement annuel de la Terre. Il diſpoſa auſſi autour du Soleil les Excentriques des autres Planetes ſur la circonference deſquels il faiſoit mouvoir le centre d'un Epicycle dont la Planete parcouroit la circonference par un mouvement Periodique. Cet Epicycle avoit pour diametre l'Excentrici-

té.

té que *Ptolemée* attribuoit aux cercles des Planetes.

Kepler réduisit cette hypothèse à une plus grande simplicité ; car il substitua aux Excentriques & aux Epicycles, que *Copernic* avoit attribué aux Planetes, des Ellipses qui representent à peu près les mêmes apparences.

Il plaça donc de même que *Copernic* le Soleil au centre du Monde, & l'orbe de la Terre entre ceux de Venus & de Mars ; & parce qu'on ne voioit point que la Terre faisant un si grand circuit autour du Soleil, causât aucune parallaxe sensible aux Etoiles fixes, les Astronomes furent obligez de supposer que les Etoiles fixes sont éloignées du Soleil à une distance immense, & qu'à son égard la distance du Soleil à la Terre, n'est que comme un point.

Tychobrahé trouva cette distance des Etoiles fixes au Soleil peu vrai-semblable, & supposant de même que *Copernic*, que les cinq Planetes tournent autour du Soleil, il aima mieux attribuer au Soleil le mouvement annuel autour de la Terre comme les Anciens ; de sorte que le Soleil & la Lune tournassent autour de la Terre, qu'il supposa immobile.

Dans cette hypothèse, Saturne, Jupiter, Mars, Venus & Mercure seroient des Satellites du Soleil, au nombre de cinq, de même que ceux que l'on a découvert depuis autour de Saturne.

Pour ce qui est du mouvement des Planetes sur leur cercle, *Ptolemée* avoit donné au cercle du Soleil une excentricité suffisante pour representer toute l'inégalité apparente de son mouvement annuel qu'il supposoit égal sur la circonference de l'Excentrique de 59′ 8″ & quelques tierces par jour.

A

A l'égard des Planetes ſuperieures, il ſuppoſoit que le mouvement de leur Epicycle ſur la circonfereuce de l'Excentrique étoit inégal plus lent vers l'Apogée que vers le Perigée. Il le réduiſoit à l'égalité en rapportant le mouvement du centre de l'Epicycle à un point pris dans la ligne de ſon Apogée éloigné du centre de la Terre du double de l'Excentricité. Car s'il avoit placé le centre de l'Excentrique auſſi éloigné de la Terre que le centre du moien mouvement, la variation de la grandeur des Epicycles vûë de la Terre auroit été évidemment trop grande; ainſi l'excentricité du moien mouvement étoit diviſée en deux parties égales par le centre de l'Excentrique.

Cette diviſion de l'excentricité du moien mouvement en deux parties égales, a été imitée par pluſieurs Aſtronomes modernes dans la Theorie du Soleil, pour repreſenter la variation du diametre apparent du Soleil plus petite de la moitié que celle qui répondroit à toute l'Excentricité.

Ainſi le ſeul cercle annuel du Soleil ſuffit pour faire la fonction des Excentriques de Venus & de Mercure & des Epicycles de Saturne, de Jupiter & de Mars. Comme l'on ſavoit déja la proportion des Excentriques aux Epicycles de ces cinq Planetes, requiſe pour repreſenter les inégalitez apparentes de leur mouvement, on connut auſſi la proportion des cercles de ces cinq Planetes au cercle du mouvement annuel du Soleil qui étoit ignoré auparavant.

Aiant diſpoſé ces cinq cercles autour du Soleil, ceux des trois Planetes ſuperieures comprenoient la Terre qui reſtoit ſituée entre le cercle de Venus & celui de Mars. Le Syſtême de

Ty-

Tychobrahé reçut auſſi une plus grande perfection de quelques Aſtronomes, qui à l'imitation de *Kepler* aſſignerent à ces Planetes des excentricitez à l'égard du Soleil qu'on leur avoit attribué à l'égard de la Terre.

L'on peut donc dans les Syſtêmes de *Copernic* & de *Tycho* ainſi perfectionnez, trouver à chaque temps donné la proportion de leur diſtance à la Terre & de toutes les cinq Planetes entre elles. Mais comme nous ſommes dans la Terre nous avons beſoin de conſiderer principalement à chaque tems donné, les diſtances des Planetes à l'égard de la Terre; car par le moien de ces diſtances on peut trouver les tems les plus propres pour les obſervations & principalement pour chercher leur parallaxe.

Par les eſſais que l'on a faits juſques à preſent dans l'Academie, on a trouvé qu'il n'y a que les parallaxes de Venus & de Mars qui ſoient évidemment ſenſibles lorſque ces deux Planetes ſont plus proches de la Terre; mais alors Venus eſt ordinairement cachée dans les raions du Soleil. Il eſt vrai qu'on la peut diſtinguer très-ſouvent à la Lunette quand elle eſt cachée à la vûë ſimple, & nous avons auſſi par ce moien tâché de déterminer ſa parallaxe, la comparant au Soleil & aux Etoiles fixes éloignées; car il eſt très-difficile de la compare rpar la Lunette aux Etoiles qui en ſont fort proche, que l'on ne peut pas appercevoir à la préſence du Soleil: Pour ce qui eſt de Mars, ſa moindre diſtance de la Terre qui arrive dans ſon oppoſition avec le Soleil, & particulierement lorſqu'il eſt auſſi dans ſon Perihelie, eſt viſible pendant la plus grande partie de la nuit avec les plus petites Etoiles. On en trouve ſouvent de-

cel-

celles qui en ſont très-proches, avec leſquelles il peut être comparé aiſément à diverſes heures de la même nuit fort éloignées entre elles. Nous en avons donné pluſieurs exemples dans les Livres des Voiages de l'Academie, & nous avons emploié la même méthode dans le Livre de la Comete de 1680, l'aiant jugé la plus propre pour la recherche des parallaxes des objets celeſtes qui ſont plus éloignez que la Lune. Or les parallaxes des Planetes en chaque tems ſont en raiſon reciproque de leurs diſtances; ainſi la proportion des diſtances étant donnée, on a la proportion des parallaxes, & reciproquement; par exemple l'an 1672, la diſtance de Mars à la Terre, & la diſtance du Soleil à la Terre étoit comme 2 à 5. La parallaxe de Mars fut trouvée de 25 ſecondes, d'où l'on conclut la parallaxe du Soleil de 10 ſecondes qu'il ſeroit très-difficile de déterminer immédiatement.

La proportion des diametres apparens d'une même Planete en divers tems, ſe trouve auſſi par la proportion des diſtances qui lui eſt réciproque. C'eſt-pourquoi ſi l'on a meſuré le diametre apparent d'une Planete lorſqu'elle eſt la plus proche de la Terre où elle paroit plus grande, on l'aura auſſi dans ſa plus grande diſtance quand il ſeroit difficile de le meſurer exactement à cauſe de ſa petiteſſe apparente.

La deſcription des traces des mouvemens particuliers des Planetes, tant dans l'hypothêſe de *Tycho* que dans celle de *Copernic* réduites à leur perfection, ſert donc à trouver les tems plus propres pour obſerver leur parallaxe; & c'eſt principalement dans ce deſſein que nous avons repreſenté en diverſes Planches les mouvemens de Saturne, de Jupiter, de Mars, du

So-

Soleil, de Venus & de Mercure à l'égard de la Terre.

Dans les Planetes de Mercure, de Venus & de Mars dont nous avons réduit les traces dans la même proportion que l'orbe annuel, on peut auſſi déterminer à chaque tems les phaſes de ces Planetes, par exemple lorſque Venus & Mercure doivent paroître comme la Lune dans ſes quartiers. Car alors une ligne droite tirée de la Terre par une de ces Planetes, doit faire un angle droit avec la ligne tirée du centre de ces Planetes au Soleil & de la maniere que l'on obſerve, qu'il y a quelque correſpondance entre le changement des phaſes de la Lune & celle des marées, l'on pourroit eſſaier s'il n'y en a point quelqu'une qui réponde aux diverſes phaſes de ces Planetes.

L'Aſtronomie ancienne qui n'avoit pas la maniere de déterminer ces phaſes ni la proportion des diſtances d'une Planete à l'égard de l'autre, ne pouvoit pas entrer dans cette diſcuſſion; ce qui ſuffit pour faire voir que ceux qui leur ont attribué des effets ſur la Terre, n'avoient pas de principes neceſſaires pour juger de cette diverſité.

Pour ce qui eſt de Jupiter & de Saturne, la diverſité des phaſes n'eſt pas ſenſible à la Terre, parce que les lignes droites tirées du centre du Soleil & du centre de la Terre au centre de ces Planetes, ne font jamais un angle aſſez grand pour pouvoir diſtinguer avec évidence l'hemiſphere vû du Soleil de celui qui eſt vû en même tems de la Terre, la difference entre la phaſe & le cercle entier étant meſurée par le ſinus verſe de cet angle qui eſt peu ſenſible à cette diſtance.

A l'égard de la figure décrite par le mouvement des Planetes autour de la Terre. Celle du mouvement annuel du Soleil paroît circulaire. Elle eſt veritablement Elliptique ; mais dans cette grandeur on ne la diſtingue pas ſenſiblement du cercle qui conſcrit l'Ellipſe. Elle a deux foiers ſur la ligne de l'Apogée, qui dans ce ſiecle eſt dirigée au 8e degré du Cancer. Un de ces foiers qui eſt celui du mouvement apparent, concourt avec le centre de la Terre repreſenté au centre de la figure éloigné du centre de l'Ellipſe de la dix-ſept milliéme partie de ſon demi-diametre ; l'autre foier eſt le centre du moien mouvement éloigné du centre de la Terre du double de l'excentricité ſimple.

Cette excentricité ſimple ſuffit pour repreſenter la variation annuelle du diametre apparent du Soleil, qui n'eſt que d'une minute & 5 ou 6 ſecondes à l'égard du diametre qui eſt d'environ 32 minutes ; mais l'excentricité double eſt neceſſaire pour repreſenter la variation apparente du mouvement journalier du Soleil, qui dans l'Apogée eſt de 57′, & dans le Perigée de 61′ ; la difference eſt de 4 minutes, qui a une proportion au mouvement journalier moien double de celle qui convient à la proportion de la variation du diametre apparent.

Pour ce qui eſt des lignes des mouvemens des cinq Planetes autour de la Terre, ce ſont des Spirales qui réſultent de la compoſition du mouvement apparent du Soleil autour de la Terre & du mouvement de la Planete ſur ſon Ellipſe particuliere dont l'excentricité qui eſt diverſe en ces differentes Planetes eſt reglée de la même maniere que nous avons dit celle

celle du Soleil, & dont les Aphelies ſont dirigez du Soleil à divers degrez du Zodiaque. La proportion du diametre des Ellipſes à celui de l'Ellipſe du Soleil dans l'Aſtronomie moderne eſt déterminée dans la Theorie de chacune de ces Planetes.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA premiere Planche repreſente le mouvement apparent de Saturne, de Jupiter, de Mars & du Soleil à l'égard de la Terre qui eſt au centre de la Figure. La proportion de la diſtance de ces trois Planetes entr'elles & à l'égard de la Terre y eſt obſervée.

La Spirale ſuperieure repreſente le mouvement apparent de Saturne depuis le 1 Janvier 1708 juſqu'au 1 Janvier 1737.

La ſeconde Spirale repretente le mouvement apparent de Jupiter depuis l'année 1708 juſqu'à l'année 1720, & la Spirale inferieure le mouvement apparent de Mars dans l'eſpace d deux années. Le cercle ponctué repreſente le mouvement annuel du Soleil, qui differe peu d'une année à l'autre.

Ces Spirales ſont diviſées par des traits qui marquent la ſituation de la Planete pour le premier jour de chaque mois. L'on pourra trouver la ſituation de chaque Planete pour les autres jours, en diviſant l'intervalle entre chaque mois en parties proportionelles.

Le cercle exterieur qui envelope les Spirales, eſt diviſé en ſignes & degrez de l'Ecliptique.

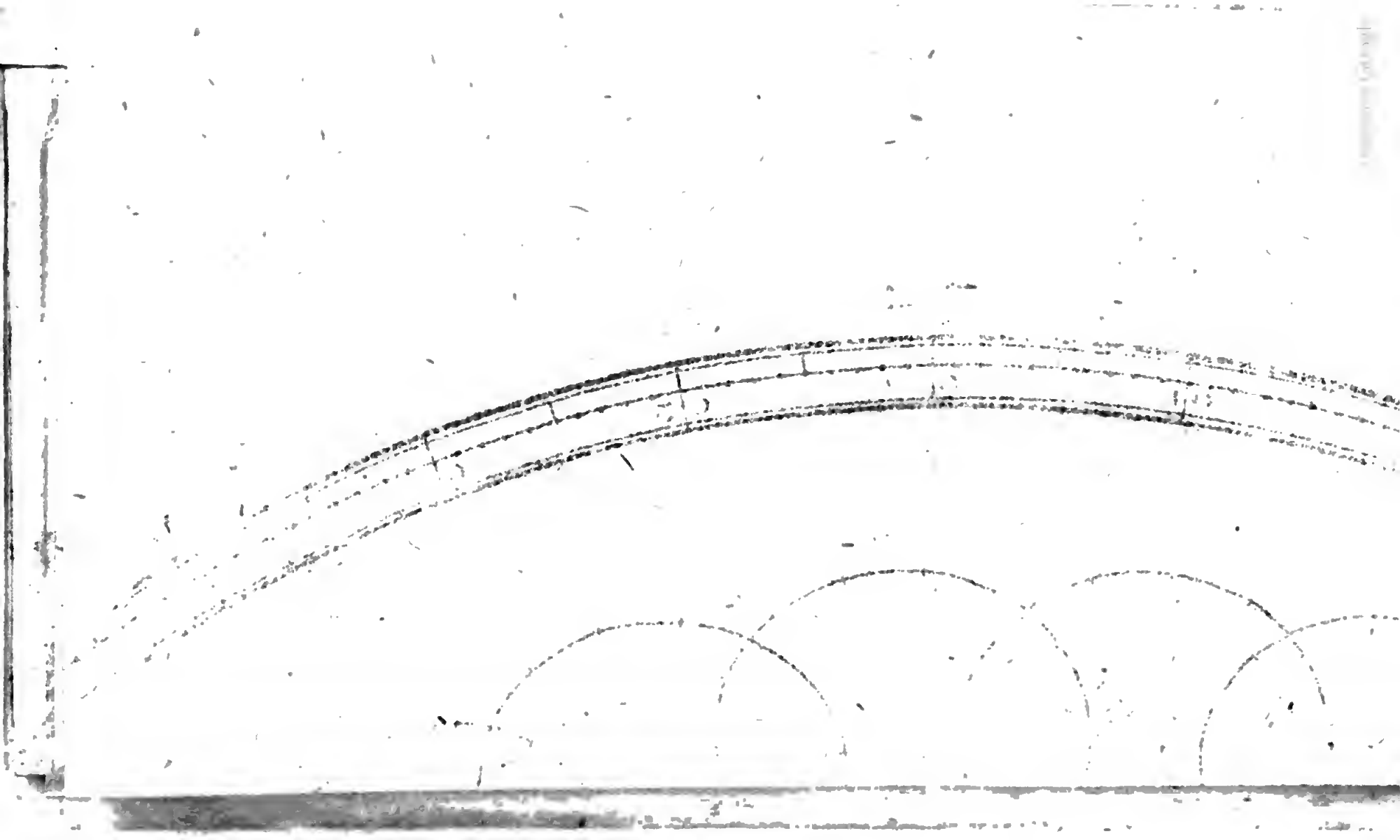
L'on voit par cette figure le temps auquel ces Planetes ſont dans leur plus grande ou dans leur

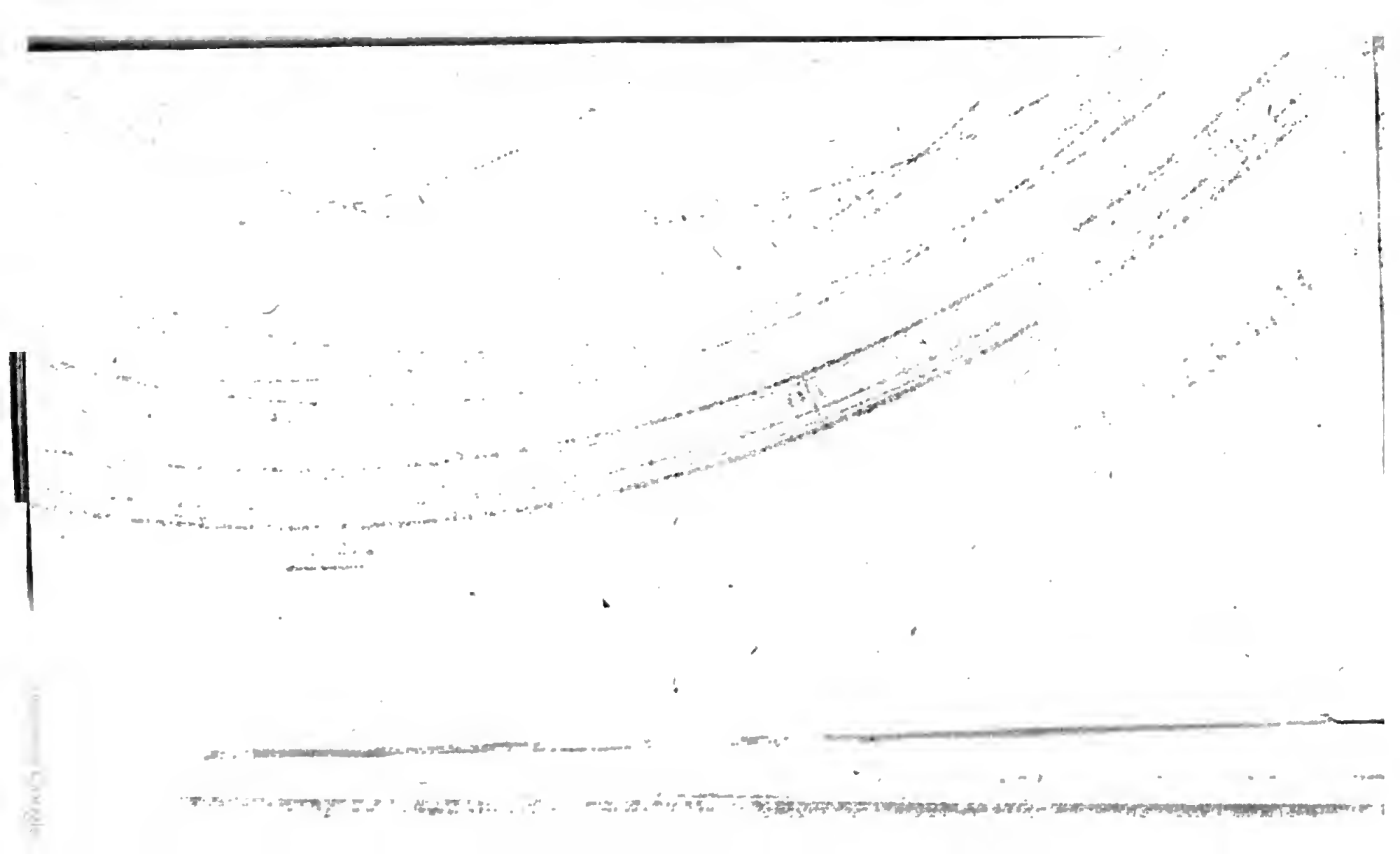
leur plus petite distance à l'égard de la Terre, & l'on peut connoître aisément leur longitude par le moien d'un fil, qui passant par le centre de la Terre & par la Planete, marque sur le cercle exterieur les degrez & Signes du lieu de la Planete.

Lorsque la Planete est dans la partie superieure, elle est directe; lorsqu'elle est dans la partie inferieure, elle est retrograde; & lorsque le fil raze la Spirale de côté & d'autre, elle est stationaire.

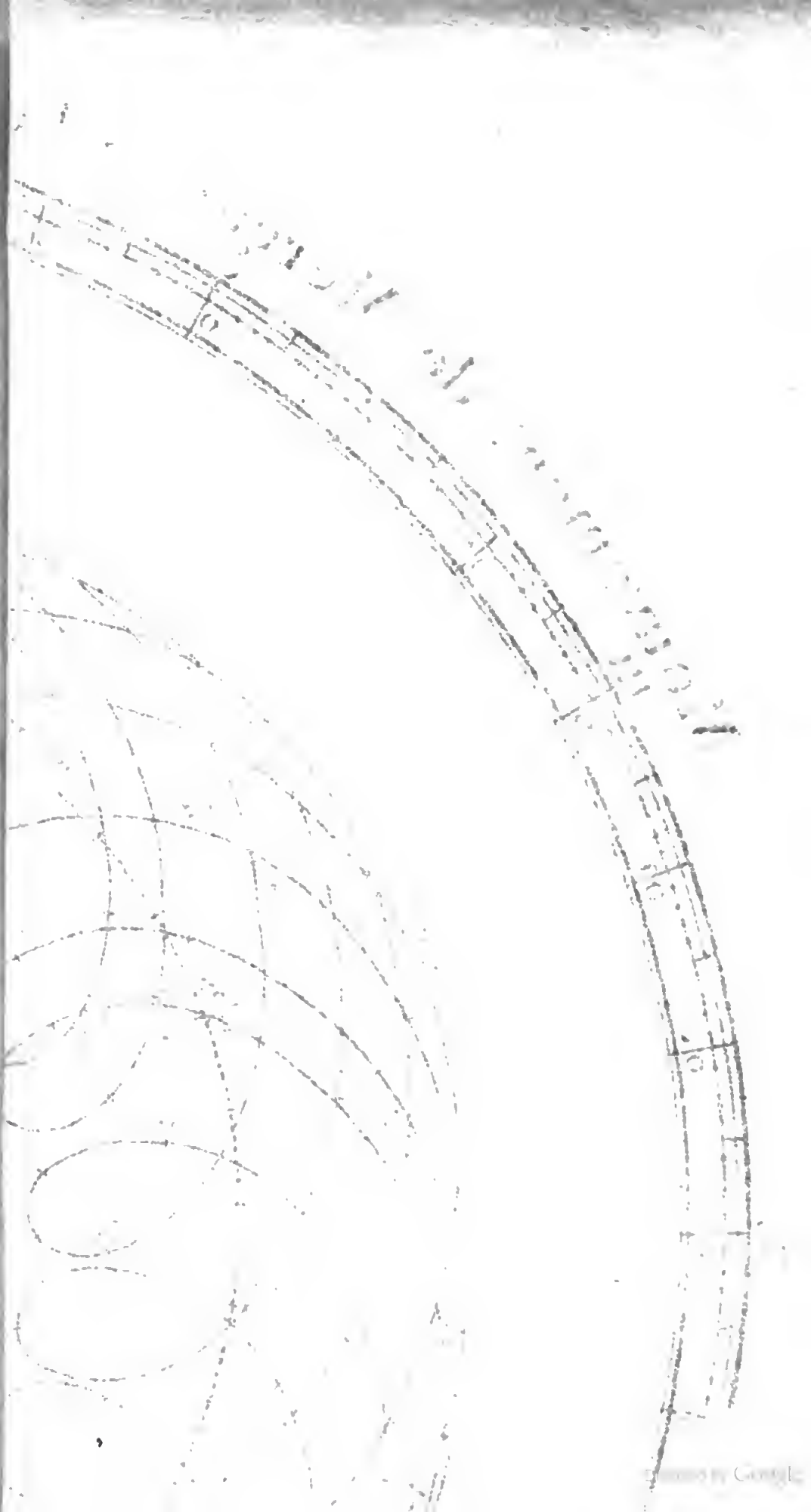
La 2e Planche represente le mouvement de Mars depuis l'année 1708 jusqu'à l'année 1723, pendant lequel tems cette Planete fait plusieurs révolutions à l'égard de la Terre. La révolution du Soleil est représentée par un cercle ponctué, lequel est divisé de même que la Spirale de Mars par des traits qui marquent la situation du Soleil & de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. L'on voit par cette Figure les tems auxquels cette Planete est plus ou moins éloignée de la Terre que le Soleil. Lorsque Mars se trouve dans la partie inferieure de la Spirale, il est en opposition avec le Soleil, & il est en conjonction lorsqu'il se trouve dans la partie superieure. Entre les oppositions qui sont representées dans cette Figure, celle où Mars approchera le plus près de la Terre, arrivera au commencement de Septembre de l'année 1719, où sa distance à la Terre est sept fois plus petite qu'au mois de Septembre de l'année 1718.

L'on peut de même que dans la Figure précedente par le moien d'un fil qui passe par le centre de la Terre & va terminer au cercle exterieur où sont marquez les degrez & signes





Meridien de Versailles
Equateur
10
20
30
40
50
60
70
80
90



ſignes du Zodiaque, trouver la ſituation de la Planete de dix en dix jours & pour tous les jours en prenant des parties proportionelles, & ſavoir lorſqu'elle eſt directe, ſtationaire ou retrograde.

La 3e Planche repreſente le mouvement de Venus à l'égard de la Terre depuis le 1 Janvier 1708 juſqu'au 1 Janvier 1716; & la 4e Planche le mouvement de Mercure depuis le 1 Janvier 1708 juſqu'au 1 Janvier 1715. Ces figures de même que les cercles qui repreſentent la révolution du Soleil, ſont diviſées par des traits qui marquent la ſituation de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. Lorſque ces Planetes ſont dans la partie inferieure de leur cercle, elles ſont en conjonction avec le Soleil; & lorſqu'elles ſe trouvent dans la partie ſuperieure, elles ſont dans leur oppoſition.

L'on peut de même qu'on l'a expliqué pour les Planetes ſuperieures, connoître les lieux de ces Planetes aux jours donnez, les tems de leurs ſtations & retrogradations, & de leur plus grande ou plus petite diſtance à la Terre. L'on voit dans ces figures que Venus eſt ſujette à moins d'inégalitez, & eſt de toutes les Planetes celle qui s'approche le plus près de la Terre.

SOLUTION GENERALE DU PROBLÊME,

Où parmi une infinité de Courbes ſemblables décrites ſur un Plan vertical, & aiant un même axe & un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine & une ligne donnée de poſition, eſt parcouru dans le plus court tems poſſible.

PAR M. SAURIN.

* DANS un Memoire précedent (*pag.* 30.) j'ai donné une Solution nouvelle de ce Problême à l'égard des Cycloïdes en particulier, & cela d'abord dans le cas ſimple d'une verticale donnée, propoſé par feu M. *Jaques Bernoulli*, & puis dans le cas plus compoſé & plus géneral d'une droite donnée de poſition, faiſant un angle quelconque avec l'axe, ſuivant l'idée de M. *Jean Bernoulli* ſon frere. Je rens ici avec ce dernier le Problême plus géneral encore, en l'étendant à toutes les Courbes ſemblables.

† Soient donc ſur un Plan vertical une infinité de Courbes ſemblables *AGB*, *AFD*, décrites ſur le même axe *AM*, & aiant même origine au point *A*: il faut déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine *A*, & la droite *CD* donnée de poſition, & qui fait avec l'axe

* 9. Août 1709. † FIG. I.

xe AM un angle quelconque, ſera parcouru dans un plus court tems que l'arc de toute autre Courbe ſemblable compris de même entre le point A, & la donnée de poſition CD.

SOLUT. De ces Courbes ſemblables j'en prens à l'ordinaire pour conſtante une quelconque AGB, & ſuppoſant auſſi toûjours que AFD une des variables eſt celle que l'on demande, je mene la corde ADB qui coupe l'arc AFD de la variable, & l'arc AGB de la conſtante, & du point B je tire BL ordonnée à la Courbe conſtante, & BQ parallele à la droite CD donnée de poſition. Si l'on nomme l'abſciſſe AL, x; l'ordonnée BL, y; l'arc AGB, z; & ſon élement, dz; la differentielle du tems par l'arc AGB ſera $\frac{dz}{\sqrt{y}}$, & le tems entier $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. La raiſon de BL à LQ étant donnée, & faite égale à celle de m à n, on aura comme dans les Solutions précedentes, $LQ=\frac{ny}{m}$, & $AQ=x+\frac{ny}{m}=\frac{mx+ny}{m}$; & appellant AC qui eſt donnée de grandeur, b; & le tems par l'arc AFD, t; on fera la même analogie que dans nôtre premier Memoire; $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}.\ t::\sqrt{AB}.\sqrt{AD}::\sqrt{AQ}\left(\frac{\sqrt{mx+ny}}{m}\right).\sqrt{AC}\ (\sqrt{b})$; d'où il vient, $t=\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{mx+ny}}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$: la difference de cette quantité (en omettant $\sqrt{bm}$) eſt, $\frac{\sqrt{mx+ny}\times\frac{dz}{\sqrt{y}}}{mx+ny}$

$\frac{-mdx-ndy}{\overline{mx+ny}\times 2\sqrt{mx+ny}} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}} = 0$; & mettant à même dénominaiſon, ...

$\frac{\overline{2mx+2ny}\times\frac{dz}{\sqrt{y}} - \overline{mdx-ndy}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}}{\overline{mx+ny}\times 2\sqrt{mx+ny}} = 0$; d'où l'on tire $\overline{2mx+2ny}\times\frac{dz}{\sqrt{y}} = \overline{mdx+ndy}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$; & $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}}\times\frac{dz}{mdx+ndy} = \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$; ce qui fournit cette conſtruction génerale :

* Sur l'axe commun AM ſoient décrites deux Courbes ; la Courbe APD dont les ordonnées $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ exprimeront les tems de la chûte par les arcs correſpondans AGB ; & la Courbe AED qui ait pour ordonnées les lignes exprimées par la fraction $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}}\times\frac{dz}{mdx+ndy}$; lorſque cette fraction deviendra égale à $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ les deux Courbes ſe rencontreront, & il eſt évident que ſi de ce point on mene ſur l'axe AM l'ordonnée DM commune aux deux Courbes ; AL (x), & LB (y), que l'on cherchoit, ſeront déterminées.

On voit clairement que de ces deux Courbes, l'une, ſavoir APD n'eſt Géometrique que lorſque $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ peut être integré, ou exprimé par les lignes droites ; & que l'autre AED l'eſt toûjours. On peut faire évanouïr de l'expreſſion de ſes Ordonnées les differences ; ces differen-

* FIG. II.

ferences se trouvant dans le numerateur, & dans le dénominateur de la fraction, & la nature des Courbes particulieres donnant les valeurs de dz & dx en dy, ou de dz & dy en dx. Mais sans rien changer à la fraction, on peut la construire aisément & généralement en prenant, 1°, la 4e proportionnelle à QT, BT, $2AQ$, * on aura $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = \overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$; 2°, la 3e proportionnelle à cette même ligne, & $\frac{1}{\sqrt{y}}$; & l'on aura $\frac{2mx + 2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$; ce qu'il falloit construire.

La premiere proportion qui donne $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = \overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$, se démontre sans peine; car, QT ou $QL + LT \left(\frac{ny}{m} + \frac{ydx}{dy}\right)$. $BT \left(\sqrt{yy + \frac{yydx^2}{dy^2}}\right) :: \frac{nydy + mydx}{mdy}$. $\frac{y}{dy} \times \sqrt{dy^2 + dx^2}$ $(dz) :: \frac{dny + mdx}{m}$. $dz :: 2AQ$ ou $2AL + 2LQ \left(\frac{2mx + 2ny}{m}\right) \overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{ndy + mdx} = \frac{BT \times 2AQ}{QT}$.

Voilà comme on démontre cette proportion; mais voici comme on y est venu. On a d'abord pris $\frac{mdx}{dz} = \frac{BL \times LT}{BT}$, & $\frac{ndy}{dx} = \frac{BL \times LQ}{BT}$; ainsi on a eu $\frac{mdx + ndy}{dz} = \frac{BL \times LT + LQ}{BT} = \frac{BL \times QT}{BT}$;

 en-

* Fig. III.

enſuite on a fait $\frac{mdx+ndy}{dz}\left(\frac{BL\times QT}{BT}\right).\frac{2mx+2ny}{m}$ $(AL+2LQ$ ou $2AQ) :: m\ (BL.\ \overline{2mx+2ny}$ $\times\frac{dz}{mdx+ndy}=\frac{BL\times 2AQ\times BT}{BL\times QT}=\frac{2AQ\times BT}{QT}$.

J'ai été bien aiſe d'expoſer ici la maniere dont cette proportion s'eſt préſentée d'elle-même, parce qu'elle fournit une conſtruction générale & plus ſimple du Problême par la deſcription d'une ſeule Courbe.

On a trouvé $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}}\times\frac{dz}{mdx+ndy}=\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, ou en rejettant $\frac{2}{\sqrt{y}}$ de l'autre côté, $\overline{mx+ny}\times$ $\frac{dz}{mdx+ndy}=\frac{1}{2}\sqrt{y}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. * Maintenant ſi ſur la Tangente BT de chaque point de la Courbe conſtante AGB, on prend la partie $BR=$ $\frac{1}{2}\sqrt{y}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, & que les extremitez R de ces parties BR forment la Courbe $A0R$, il eſt clair que lorſque $\frac{1}{2}\sqrt{y}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ deviendra $=$ $\overline{mx+ny}\times\frac{dz}{mdx+ndy}$, ſi l'on décrit l'arc AFD terminé au point D, où la droite AB coupe la donnée de poſition CD, & par conſéquent ſemblable à l'arc AGB, le tems par l'arc AFD ſera le plus court, puiſque c'eſt lorſqu'il eſt le plus court que l'on a $\overline{mx+ny}\times\frac{dz}{mdx+ndy}=\frac{1}{2}$ $\sqrt{y}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. La Courbe $A0R$ étant donc décrite,

* FIG. III.

crite, on n'a qu'à mener la corde AR parallele à la donnée de position CD, & du point R mener la Tangente RB à la Courbe conſtante AGB, l'ordonnée BL menée du point B, déterminé de cette ſorte, ſera la valeur cherchée de y; BR qui eſt $\frac{1}{2}\sqrt{y}\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, ſe trouvant $=\overline{mx+ny}\times\frac{dz}{mdx+ndy}$, quand AR eſt parallele à CD; car alors à cauſe des paralleles AR, BQ, on a la proportion dont on vient de parler; $QT.BT::AQ.BR$, & par conſéquent $BR=\frac{BT\times AQ}{QT}=\overline{mx+ny}\times\frac{dz}{mdx+ndy}=\frac{1}{2}\sqrt{y}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. Cette belle & élegante conſtruction qui naît ſi naturellement de nôtre Analyſe, a été donnée par M. *Jean Bernoulli* dans le *Journal des Savans* du 12e de Decembre 1697, & inſerée dans les *Actes de Leipſic* de 1698, pag. 55; mais en deux mots, ſans analyſe, & ſans démonſtration.

Pour appliquer maintenant nôtre premiere conſtruction générale par l'interſection de deux Courbes à quelques exemples particuliers. Soient les Courbes ſemblables AFD AGB des Cycloïdes. Par la ſubſtitution des valeurs de dz, & dx en dy, l'égalité $\frac{\overline{2mx+2ny}}{\sqrt{y}}\times\frac{dz}{mdx+ndy}=\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ ſe changera en celle-ci, $\frac{\overline{2mx+2ny}}{my+n\sqrt{ay-yy}}\times\sqrt{a}=\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$; ou diviſant par 2, & multi-

pliant par $\sqrt{a}$; $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2}\sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$. La Courbe APD aura donc pour ordonnées les arcs de Cercle correſpondans MIS, exprimez par $\frac{1}{2}\sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = \int \frac{ady}{2\sqrt{ay-yy}}$, valeur d'un arc de cercle dont le diametre eſt a; ce qui pour le remarquer en paſſant, eſt une démonſtration bien courte & bien aiſée, de cette partie de la découverte de M. *Huygens* démontrée avec tant de peine, que les tems par differens arc AGB d'une Cycloïde ſont entr'eux comme les arcs correſpondans MIS du cercle generateur.

L'autre Courbe AED dont les ordonnées doivent être égales à la fraction $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, ſe conſtruira plus aiſément, ſi on met dans cette fraction pour m & n leurs proportionnelles $LB\ (y)$, & LQ, qui n'aiant pas de nom ſera déſignée par n même; au lieu de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on aura donc $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$. La 4e proportionnelle à $LB\ (y)$, LQ, (n), $ST\ (\sqrt{ay-yy})$ eſt $\frac{n\sqrt{ay-yy}}{y}$; Si on lui ajoûte $LB\ (y)$, on aura une ligne $= \frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$; & prenant une 4e proportionnelle à cette même ligne $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$, $MN\ (a)$, $AQ\ (x+n)$, elle

elle ſera $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, qui eſt la ligne qu'il falloit conſtruire.

Dans cette proportion $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$. MN (a) :: $AQ\,(x+n)$. $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on s'apperçoit aiſément que n (LQ) eſt égal à $\sqrt{ay-yy}$; car n aiant cette valeur la proportion donne $\frac{yy+ay-yy}{y}$ (a). MN (a) :: $x+\sqrt{ay-yy}$. $x+\sqrt{ay-yy} \times \frac{a}{a}$; Or cette 4e proportionnelle étant la valeur de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2}\sqrt{a}\int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = x+\sqrt{ay-yy}$; Il s'enſuit que n priſe pour LQ eſt $= \sqrt{ay-yy}$; ce qui donne la conſtruction de mon premier Memoire: il n'y a qu'à mener dans le cercle generateur la corde * MS parallele à la donnée de poſition, & du point S, SB parallele à AM, le point B eſt le point cherché, l'ordonnée BL eſt la valeur de y, l'arc AGB eſt perpendiculaire à BQ, & par conſéquent l'arc demandé AFD perpendiculaire à la donnée de poſition CD.

Dans le cas de la verticale au lieu de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2}\sqrt{a}\int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, on a $\frac{ax}{y} = \frac{1}{2}\sqrt{a}\int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, d'où il vient une conſ-

* FIG. IV.

truction fort ſimple pour la Courbe AED; car prolongeant LB (y) juſqu'à ce qu'elle rencontre en V, NV parallele à AM, on aura $LV = MN = a$, & menant VR parallele à BA, on aura $RL = \frac{ax}{y}$; ainſi ſur VL prolongé du côté de L prenant $LQ = LR$, le point E ſera à la Courbe, & faiſant de même pour tous les y, la Courbe ſera décrite. Comme dans l'autre Courbe on a par-tout $LP = \frac{1}{2}Va \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$ $= x + \sqrt{ay-yy} = AL + ST$, il eſt viſible que lorſque AL (x) deviendra AM qui eſt égale à la demie circonférence MSN, LE deviendra en même tems MD qui eſt auſſi égale à la demie circonférence MNS: l'on aura donc en ce point $\frac{ax}{y} = \frac{1}{2}Va \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = x + \sqrt{ay-yy}$ $= x + o$ ($\sqrt{ay-yy}$ s'évanouïſſant au point M), & LB $(y) = a$.

Dans ce cas de la verticale, les deux Courbes ne peuvent ſe rencontrer qu'au point D qui répond au point M; les ordonnées de l'une $AL + ST$ étant toûjours plus grandes que celles de l'autre $AL + AR$, puiſque AR eſt toûjours plus petite que ST, excepté lorſque le point L ſe confond avec le point M; car alors le point S ſe confondant avec le point A, AR s'évanouït auſſi, & il ne reſte que $AL = AM$ pour ordonnée auſſi-bien que pour abſciſſe de l'une & de l'autre Courbe.

Au reſte il n'eſt pas difficile de voir que ST eſt toûjours plus grande que AR; car NS étant parallele à la Tangente au point B; NG qui eſt pa-

parallele à la corde AB de la Cycloïde, doit tomber ſur un point G plus proche de T que le point S; mais $TG = BO = AR$; donc TS eſt plus grande que AR.

On trouve ici une maniere plus ſimple encore & plus aiſée que la précedente de conſtruire les deux Courbes qui déterminent le point L par leur interſection. Laiſſant la partie commune AL, il ne faut que prendre les ST pour ordonnées de l'une, & les GT pour ordonnées de l'autre; il eſt évident que ST & GT s'évanouïſſant enſemble quand L tombe en M, les deux Courbes ApM, AeM, ſe rencontreront en ce point, & ne ſe rencontreront qu'en ce point; ce qui donne toûjours $y = a$.

Si les Courbes ſemblables propoſées ſont des cercles, & que le demi-diametre de celui qu'on prendra pour conſtant, ſoit a; on aura $\int \frac{dz}{\sqrt{y}} = \int \frac{ady}{\sqrt{aay - y^3}}$, & la Courbe APD ſe conſtruira par des arcs de Lemniſcate de cette maniere. *Sur l'axe AM du cercle ABM pris pour conſtant décrivez le quart d'une Lemniſcate, & du point A menez une corde AH moienne proportionnelle entre AM ($2a$), & $2LB$ ($2y$), égale par conſéquent à $2\sqrt{ay}$; elle déterminera l'arc AIH: prenez $LP =$ à cet arc, le point P ſera à la Courbe APD qu'on avoit à conſtruire. On trouve cette conſtruction dans les *Actes de Leipſic* que j'ai déja citez, Pag. 225; elle eſt de feu M. *Jacques Bernoulli*, qui n'a fait que l'indiquer, de même que M. *Bernoulli* ſon Frere la conſtruction générale que nous avons vûë; en voici l'analyſe & la démonſtration.

 Soit

* FIG. V.

Soit $AK = z$, & $KH = v$. L'équation à la Lemniſcate donnant $zz + vv = 2a\sqrt{zz - vv}$, on en tire $v = \pm\sqrt{\pm 2a\sqrt{2zz + aa} - 2aa - zz}$; & $vv = \pm 2a\sqrt{2zz + aa} - 2aa - zz$: mais on a $AH^2 = AK^2 + KH^2 = zz + vv = 4ay$ (par conſtruction); donc $4ay = 2a\sqrt{2zz + aa} - 2aa$; ou $2ay + aa = a\sqrt{2zz + aa}$; d'où, en quarrant de part & d'autre, on tirera $zz = 2yy + 2ay$; & $z = \sqrt{2ay + 2yy}$; $dz = \frac{ady + 2ydy}{\sqrt{2ay + 2yy}}$, & $dz^2 = \frac{4yydy^2 + 4aydy^2 + aady^2}{\sqrt{2yy + 2ay}}$. $zz + vv = 4ay$ donne auſſi $vv = 4ay - zz = 4ay - 2yy - 2ay$ (en mettant pour zz ſa valeur $2yy + 2ay$) $= 2ay - 2yy$; donc $v = \sqrt{2ay - 2yy}$; $dv = \frac{ady - 2ydy}{\sqrt{2ay - 2yy}}$; & $dv^2 = \frac{4yydy^2 - 4aydy^2 + aady^2}{2ay - 2yy}$. On aura donc

$$dz^2 + dv^2 = \frac{aa + 4ay + 4yy \times dy^2}{2ay + 2yy} + \frac{aa - 4ay + 4yy \times dy^2}{2ay - 2yy}.$$

En multipliant en croix le dernier membre de cette égalité pour lui donner un dénominateur commun, & faiſant enſuite les réductions néceſſaires, il viendra $dz^2 + dv^2 = \frac{a^2dy^2}{aay - y^3}$; $\sqrt{dz^2 + dv^2}$ (Element de l'arc AIH) $= \frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{aa - y^2}}$; & faiſant $a = 1$, $\sqrt{dz^2 + dv^2} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, & $\int\sqrt{dz^2 + dv^2} = \int\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$ = à l'arc de la Lemniſcate. La Cour-

Courbe *APD* formée par ces arcs de Lemniſcate eſt donc celle qu'il falloit conſtruire, & dont les ordonnées doivent être $= \int \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}}, = \int \frac{ady}{\sqrt{aay-y^3}}$.

Il eſt bon de remarquer, que lorſque le point *L* tombe ſur le centre du cercle *AGB* pris pour conſtant, la corde *AH* de la Lemniſcate devient *AM*, le point *H* tombant ſur le point *M*, & l'ordonnée *PL* eſt alors égale au quart *ALM* de la Lemniſcate. Lorſque le point *L* tombe au-delà du centre par rapport au point *A*, comme en *l*, le point **H* tombe au point *b* d'un autre quart de la Lemniſcate qu'il faut concevoir décrit au deſſous de l'axe *AM*; de ſorte que l'arc *AIb* eſt plus grand que le quart *AIM*; & c'eſt ce qui a fait dire à M. *Bernoulli*, lorſque *BL* devient *bl*, de prendre pour *LE* l'arc *AIM*, plus l'arc *HM*, qui eſt égal à l'arc *Mb*. Enfin quand le point *L* tombe en *M*, le point *b* tombe en *A*, & l'arc *AIb* eſt égal à 2 fois le quart entier *AIM* de la Lemniſcate; ce qui fait voir que les ordonnées de la Courbe *APD* augmentent toûjours juſqu'à ce qu'elles deviennent égales à la demie circonference entiere de la Lemniſcate.

Je viens à la Courbe *AED*: M. *Jacques Bernoulli* donne cette conſtruction pour le cas particulier où la donnée de poſition eſt verticale. † Il dit de prendre *LE* 4e proportionnelle aux droites *AH*, *AM*, & 2*CF*, & ne s'explique pas davantage. Dans le cas de la Verticale on a $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{y}}$; ainſi *LE* doit être égale à la

* FIG. VI. † FIG. V.

fraction $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$; ſi l'on en chaſſe les differences il viendra $\frac{2aa-2a\sqrt{aa-yy}}{y\sqrt{y}}$; c'eſt cette expreſſion qui fournit la conſtruction de M. *Bernoulli* ; car par la proprieté du cercle on a $BL\ (y) . AL$, ou $AC-LC\ (a-\sqrt{aa-yy}) :: MC\ (a) . CF\ \left(\frac{aa-a\sqrt{aa-yy}}{y}\right)$; & ſuivant l'analogie qu'il preſcrit, $AH\ (2\sqrt{ay}$ ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour a l'unité$) . AM\ (2a)$ (ou ſeulement 2) $:: 2CF\ \left(\frac{2aa-2a\sqrt{aa-yy}}{y}\right) . LE\ \left(\frac{2aa-2a\sqrt{aa-yy}}{y\sqrt{y}}\right)$.

Mais l'expreſſion differentielle $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$, ſans aller plus loin préſente une conſtruction facile, & qui revient à très-peu près à la même. Il ne faut que mener la Tangente * BT, & AS parallele à cette Tangente, on aura $LT . BT :: dx . dz :: AL\ (x) . AS\ \left(\frac{xdz}{dx}\right)$, & la 4e proportionnelle aux trois droites $AH, AM, 2AS$, ſera $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$.

Il eſt évident que ſi dans ce même cas de la verticale les Courbes ſemblables étoient des Paraboles, dont la Conſtante eût a pour parametre ; & qu'en rejettant $\frac{1}{2}\sqrt{y}$ de l'autre côté, au lieu de $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, on fit $\frac{xdz}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{y}\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$; la Courbe AED ſeroit une Hyperbole équilatere qui auroit pour axe déterminé $\frac{1}{4}a$; car $\frac{xdz}{dx}$ eſt

* FIG. V.

eſt la valeur de la demi-tangente de la Parabole $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$; & la Courbe formée par ces demi-tangentes comme ordonnées, eſt viſiblement une Hyperbole équilatere dont l'axe déterminé eſt égal à $\frac{1}{4}a$.

Revenant aux Cercles; dans le cas general d'une donnée de poſition, faiſant un angle quelconque avec l'axe AM, qui eſt nôtre cas, au lieu de l'expreſſion $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, (valeur des Ordonnées de la Courbe AED) l'évanouïſſement des differences donne $\frac{2aam-2am\sqrt{aa-yy}+2any}{my\sqrt{y}+n\sqrt{aay-y^3}}$, & mettant pour m & n leurs proportionnelles LB (y) & LQ (qui ſera deſignée par n même) $\frac{2aay-2ay\sqrt{aa-yy}+2any}{yy\sqrt{y}+n\sqrt{aay-y^3}}$; ou diviſant par $\sqrt{y}$, $\frac{2\sqrt{y}\times a-\sqrt{aa-yy}+n\times a}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$; d'où je tire cette conſtruction très-ſimple: *Menez QG perpendiculaire ſur le raion CB, & prenez la 4e proportionnelle à BG, AQ, AH, elle ſera $= \frac{2\sqrt{y}\times aa-a\sqrt{aa-yy}+an}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$. On le verra ſans peine, ſi l'on mene encore LO parallele à QG; car on aura, 1°. CB (a). $BL(y)$ :: $BL(y)$. BO $\left(\frac{yy}{a}\right)$; 2°. CB (a). CL $(\sqrt{aa-yy})$ :: $QL(n)$. GO $\left(\frac{n+\sqrt{aa-yy}}{a}\right)$; 3°. BG ou $BO+OG$

* Fig. VI.

$OG\left(\frac{yy+n\sqrt{aa-yy}}{a}\right)$. AQ ou $AC-CL+LQ$ $(a-\sqrt{aa-yy+n})$ :: AH ($2\sqrt{ay}$, ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour a l'unité). $\frac{2\sqrt{y}\times aa-a\sqrt{aa-yy+an}}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$; ce qu'il falloit conſtruire & démontrer.

DES MOUVEMENS

Commencez par des viteſſes quelconques, & enſuite primitivement accelerez en raiſon des tems écoulez, dans les milieux réſiſtans en raiſon des quarrez des viteſſes effectives du mobile.

PAR M. VARIGNON.

* DANS le Memoire du 15 Juin dernier, on a vû ce que des Mouvemens primitivement accelerez en raiſon des tems écoulez, en commençant à zero de viteſſe, deviendroient dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrez de celles que le mobile y auroit effectivement malgré les réſiſtances de ces milieux ; quelles ſeroient alors les viteſſes de ce mobile, les eſpaces qu'il parcourroit, &c. Voici préſentement ce qui arriveroit auſſi dans ces milieux à des mouvemens commencez par des viteſſes quelconques, & enſuite accelerez encore primitivement en raiſon des tems écoulez, c'eſt à dire, qui dans un milieu ſans réſiſtance ni action auroient encore des accroiſſemens égaux de viteſſe en tems

* 17. Août 1709.

34

OC

(a-

nal

ce

æc

Ce

*

tiv
en
da
de
m
fe
ce
qu
ve
qu
et
da
er

tems égaux, ainſi que *Galilée* le ſuppoſe dans la chûte des corps. Nous nous ſervirons pour cela de deux Lemmes par où commence le Memoire qu'on vient de citer, & qu'on citera encore dans la ſuite.

PROBLÊME.

La conſtruction générale du Lem. 1. *art.* 4. *pag.* 248. *étant ici ſuppoſée, trouver les Courbes* ARC *des réſiſtances totales ou des viteſſes perdues*; HUC, *des viteſſes reſtantes ou actuelles, &c. Dans l'hypothêſe* 1°. *des réſiſtances en raiſon des quarrez de ces viteſſes actuelles*; & 2°. *des viteſſes primitives en raiſon des ſommes faites d'une conſtante quelconque augmentée d'autres qui croîtroient en raiſon des tems écoulez depuis le commencement du mouvement, ainſi qu'il arriveroit dans l'hypothêſe de* Galilée *ſur la peſanteur, ſi d'une force quelconque différente de la peſanteur conſtante d'un corps, on le jettoit verticalement de haut en bas dans un milieu ſans réſiſtance ni action.*

SOLUTION.

I. Suivant le Lem. 1. pag. 246. & ſon art. 4. pag. 248. en ſe ſervant toûjours des noms qui y ſont ſuppoſez, la premiere des deux hypothêſes qu'on fait ici, y donnera encore, comme dans la Solut. 1. du Prob. de la pag. 250. $TE(z) = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{RV \times RV}{AB}\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{\overline{TV-TR}^{2}}{AB}\left(\frac{\overline{v-r}^{2}}{a}\right)$ en ſuppoſant $AB = a$ conſtante; & la 2e donnera, TV

* FIG. I. II. III.

$TV\,(v) = TX + XV\,(b+t)$: de ſorte que les deux enſemble donneront pareillement ici $z = \frac{uu}{a}$, & $z = \frac{\overline{b+t-r^2}}{a}$. Donc en ſubſtituant chacune de ces deux valeurs de z dans l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt-du}{z}$ de cet art. 4. p. 248. L'on aura ici $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{\overline{b+t-r^2}}$ pour l'équation de la Courbe ARC des réſiſtances totales $TR\,(r)$ ou des viteſſes perduës ; & $\frac{dt}{a} = \frac{adt-adu}{uu}$, ou $uudt = aadt - aadu$, d'où réſulte $aadu = aadt - uudt$, ou $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, comme dans la Solut. 1. du Prob. de la pag. 249. art. 2 pour l'équation pareillement requiſe ici de la Courbe HUC des viteſſes reſtantes $TU\,(u)$: mais avec cette difference que ces viteſſes TU commençant (*hyp.*) à zero en A dans ce Prob. de la pag. 249. & ici à AH (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 248.) $= Ab\,(b)$; la Courbe HUC doit ici paſſer par un point H de AB perpendiculaire en A ſur l'axe ATC, & prolongée où beſoin ſera du côté de B, lequel point H donne $AH = AF\,(b)$, au lieu que dans le Prob. de la pag. 249. art. 4. cette Courbe des viteſſes reſtantes (u) doit paſſer par A, comme dans la fig. 1. qu'on voit ici.

II. Si l'on prend encore ici $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, comme dans la Solut. 1. du Prob. de la pag. 249. art. 3. On trouvera ici comme là, $\frac{adu}{aa-uu}$

$\left(\frac{dt}{k}\right)$

$\left(\frac{dt}{a}\right) = \frac{dx}{ax}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, qui eſt une équation à une Logarithmique d'une ſoûtangente $= \frac{1}{2}a$, & d'ordonnées $= x$ perpendiculaires à ſon aſymptote dont les abſciſſes correſpondantes ſont $= t$. Pour décrire cette Logarithmique il faut conſiderer

1°. Que l'équation ſuppoſé $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ rend $\frac{x-a}{x+a} \times a = b$ lorſque $u = b$, c'eſt à dire, $x = \frac{aa+ab}{a-b}$ au commencement du mouvement dont on ſuppoſe que b eſt la premiere viteſſe (u); & après avoir pris $AB = a$, $AH = b$, ſur une perpendiculaire en A à la droite ACT, ſi l'on y prend $AP = \frac{aa+ab}{a-b} = \frac{AB+AH}{AB-AH} \times AB = \frac{AB+AA}{\mp HB} \times AB$, le ſigne ſuperieur du dénominateur étant pour les Fig. 1. 2. & l'inférieur pour la Fig. 3. l'on aura P pour un des points de la Logarithmique requiſe, & ATC pour ſon aſymptote.

2°. Que le cas de $u\ (TU) = a\ (AB)$ réduiſant à $x - a = x \mp a$ l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ du preſent art. 2. on verra auſſi que cela ne pouvant arriver que lorſque x eſt infinie, la Logarithmique cherchée doit non-ſeulement (*nomb.* 1.) paſſer par P, mais auſſi aller en s'écartant de ſon aſymptote du côté de C.

III. Si donc on prend PLC pour cette Logarithmique, laquelle ait (*art.* 2.) ſes ſoutangentes (ſur ſon aſymptote ATC). chacune $= \frac{1}{2}$ $a =$

$a = \frac{1}{2} AB$, & ſes ordonnées TL (paralleles à AB) $= x$, leſquelles prolongées la rencontrent en L, ſon aſymptote en T, & les droites BC, FXC, FVC, en S, X, V, les deux premieres BC, FXC, étant paralleles à ATC, & la troiſiéme FVC étant inclinée de 45 deg. ſur elles.

Cela fait, ſi l'on conſidere encore que l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ de l'art. 2. vient d'y donner (*nomb.* 1.) $AP = \frac{aa+ab}{a-b} = \frac{AB+AH}{AB-AH} \times AB = \frac{AB+AH}{\mp HB} \times AB$ lorſque TU $(u) = AH$ (b), c'eſt à dire, lorſque TU eſt en AH, & TL (x) en AP; on verra que lorſque AH (b) eſt plus grande que AB (a), comme dans la fig. 3. cette premiere ordonnée AP de la Logarithmique PLC, & par conſéquent auſſi ſes autres ordonnées TL (x) doivent être négatives de ce qu'elles ſont lorſque AH (b) eſt égale ou moindre que AB (a) comme dans les fig. 1. 2. Donc en prenant les x (LT) de l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, poſitives dans les fig. 1. 2. on les aura négatives dans la fig. 3. c'eſt à dire qu'elles s'y changeront en $-x$; ce qui changera auſſi cette équation $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$ ſuppoſée pour les fig. 1. 2. en $u = \frac{-x-a}{-x+a} \times a = \frac{x+a}{x-a} \times a$ pour la fig. 3. De ſorte que dans les fig. 1. 2. l'on aura TU $(u) = \frac{x-a}{x+a} \times a = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times$

AB

$AB = \frac{LS \times AB}{LT + ST}$; & dans la fig. 3. $TU(u) = \frac{x+a}{x-a} \times a = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$: c'eſt à dire en general $TU(u) = \frac{LT \mp ST}{LT \mp ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT \mp ST}$, les ſignes ſuperieurs dans ces fractions étant pour les fig. 1. 2. & les inferieurs pour la fig. 3.

IV. Donc en prenant par tout $TU(u)$ de cette valeur, c'eſt à dire, $TU = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST}$ dans les fig. 1. 2. & $TU = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$ dans la fig. 3. la ligne HUC, qui paſſera par tous les points U ainſi trouvez, ſera la Courbe ici requiſe des viteſſes (u) reſtantes des primitives (v) ſuppoſées, malgré les réſiſtances pareillement ſuppoſées. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

V. Cette Courbe HUC des viteſſes (u) reſtantes des primitives (v) malgré les réſiſtances ſuppoſées, étant ainſi décrite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR = TV$ (*hyp.*) $= AT + AF$ (*art.* 1.) $= AT + AH$; & la ligne ARC qui paſſera par tous les points R ainſi trouvez, ſera ici (*Lem.* 1. *pag.* 246.) la Courbe des réſiſtances totales (r) ou des viteſſes perduës, exprimée (*art.* 1.) par l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{b+r-r^2}$. *Ce qu'il falloit auſſi trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque la Solution (*art.* 2. *nomb.* 1.) donne $AP = \frac{aa+ab}{a-b}$, il eſt manifeſte que $LT(x)$ en AP,

AP, doit y donner auſſi $x = \frac{aa+ab}{a-b}$; & qu'ainſi ſon art. 2. donnant en general $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, d'où réſulte $xu + au = ax - aa$, ou $aa + au = ax - xu$, & conſéquemment auſſi $x = \frac{aa+au}{a-u}$; LT en AP doit pareillement y donner $\frac{aa+ab}{a-b} = \frac{aa+au}{a-u}$, ou $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+u}{a-u}$, d'où réſulte $aa + ab - au - bu = aa + au - ab - bu$, c'eſt à dire, $ab - au = au - ab$, ou $2ab = 2au$; & par conſéquent $u\ (TU) = b\ (AF)$. Mais LT en AP, rend TU en AH. Donc la premiere AH des viteſſes $TU\ (u)$ au commencement A du tems AT, eſt par tout ici égale à l'initiale $AF\ (b)$ conformément à l'art. 4. du Lem. 1. pag. 248. cité pour cela dans l'art. 1. de la Solution précedente.

COROLLAIRE II.

L'équation $TU\ (u) = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution pour les fig. 1. 2. dans leſquelles AH eſt (*hyp.*) moindre que AB, fait voir que les viteſſes reſtantes $TU\ (u)$ y doivent toûjours croître depuis la premiere $AH\ (b)$; puiſque le raport $\frac{LS}{LT+ST}$ ou $\frac{LT-ST}{LT+ST}$ croît avec LS ou LT, qui y croiſſent (*Solut. art. 2. nomb. 2.*) à l'infini du côté de C.

Co-

COROLLAIRE III.

Au contraire l'équation $TU(u) = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$ trouvée auſſi dans l'art. 3. de la Solution pour la fig. 3. dans laquelle AH eſt (*hyp.*) plus grande que AB, fait voir que les viteſſes reſtantes $TU(u)$ y doivent toûjours diminuer depuis la premiere AH (*b*); puiſque le raport $\frac{LT-ST}{LT+ST}$ croiſſant (*Corol.* 2.) avec les LT, le raport $\frac{LT+ST}{LT-ST}$ doit au contraire diminuer à meſure que ces LT augmentent, c'eſt à dire (*Solut. art.* 2. *nomb.* 2.) à l'infini du côté de C.

COROLLAIRE IV.

Quoique les TU croiſſent à l'infini (*Corol.* 2.) depuis AH du côté de C dans les fig. 1. 2. & qu'elles diminuent au contraire à l'infini (*Corol.* 3.) du côté de C dans la fig. 3. Celles des fig. 1. 2. ne peuvent jamais être plus grandes, ni celles de la fig. 3. moindres que AB, même quand AT ſeroit infinie; puiſque AT infinie rendant (*Solut. art.* 2. *nomb.* 2.) LT pareillement infinie, & conſéquemment la finie ST nulle par rapport à LT, l'équation generale $TU = \frac{LT \mp ST}{LT \pm ST} \times AB$ trouvée dans la Solut. art. 3. pour tous les cas des fig. 1. 2. 3. ſe réduiroit alors à $TU = \frac{LT}{LT} \times AB = AB$. Ce qui fait voir que dans quelque cas que ce ſoit, la Cour-

Courbe *HUC* des viteſſes reſtantes *TU* (*u*) ne peut arriver juſqu'en *BC* parallele à *ATC*, qu'à une diſtance infinie de *AB* perpendiculaire à ces paralleles par l'origine *A* des tems ou des abſciſſes *AT*; & qu'ainſi dans tous les cas imaginables cette droite *BC* doit être une aſymptote de la Courbe *HUC* des viteſſes *TU* (*u*) reſtantes ici malgré les réſiſtances ſuppoſées. Ce qu'on a déja vû dans le Corol. 1. de la pag. 252. pour le cas de la fig. 1. où ces viteſſe commencent (*hyp.*) à zero.

COROLLAIRE V.

Puiſque *TU* en *AH*, y rend par tout (*Corol.* 1.) $u=b$, l'équation (*Solut. art.* 1.) $dt=\frac{aadu}{aa-uu}$ de la Courbe *HUC*, doit s'y changer en $dt=\frac{aadu}{aa-bb}$; Ce qui fait voir que cette Courbe doit rencontrer *AB* (prolongée où beſoin ſera) en *H* ſous un angle *BHU* dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement à un droit :: *aa* . *aa*—*bb*.

COROLLAIRE VI.

Pour la Courbe *ARC*, dont (*Solut. art.* 1. & 5.) l'équation eſt $dt=\frac{aadr}{b+t-r^2}$, elle doit rencontrer ſon axe en *A*, ſous un angle *TAR* dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement :: *bb* . *aa*. Puiſque *TR* (*r*) en *A*, rendant $r=0$, & $t=0$, réduit cette équation à $dt=\frac{aadr}{bb}$. Et

les

les dr croiſſant ou décroiſſant ici avec les $b+t-r$ (u ou TU) correſpondantes, cette Courbe ARC tournera ſa convexité ou ſa concavité en même ſens ou du même côté que la Courbe HUC tournera la ſienne.

COROLLAIRE VII.

On vient de voir dans le Corol. 4. que lorſque AH (*fig.* 1. 2.) eſt moindre que AB, les viteſſes TU (u) croiſſent toûjours juſqu'à BC; & que lorſque AH (*fig.* 3.) eſt plus grande que AB, ces viteſſes TU décroiſſent toûjours juſqu'à la même BC, à laquelle ce Corol. 4. fait voir qu'elles n'aboutiront, ou ne deviendront égales à AB de part & d'autre qu'après un tems infini AT (t), qui à la fin rendra TU (u) $=AB$ (a), & changera ainſi l'équation $dt=\frac{aadu}{aa-uu}$ de la Courbe HUC en $dt=\frac{aadu}{aa-aa}=\frac{aadu}{0}$. Donc alors les accroiſſemens ou décroiſſemens du ſe trouvant nuls, ſi le mouvement continuoit, ce ſeroit après cela d'une viteſſe conſtante $=AB$ (a) qui le rendroit uniforme. Auſſi ce cas de $u=a$, changeant l'équation $v-r=u$ trouvée dans le Lem. 1. art. 1. pag. 247. en $v-r=a$, donneroit alors $dv-dr=0$, ou $dv=dr$, c'eſt à dire (*remarq.* 1. *pag.* 267.) la peſanteur du Mobile égale à la réſiſtance que lui feroit alors le milieu ſuppoſé, en regardant cette peſanteur conſtante comme cauſe de l'acceleration primitive (dv) continuellement ajoûtée à la viteſſe initiale AH (b) laquelle fût ici de projection verticale de haut en bas; & cette égalité de la peſanteur du mobile avec la réſiſtance qui s'oppo-

ſeroit ici à ſa viteſſe AB (a), empêchant également l'une & l'autre de rien changer à cette viteſſe, cette même viteſſe non-ſeulement reſteroit uniforme tant que le mouvement continueroit dans le milieu ſuppoſé; mais encore ſeroit la plus grande (appellée *terminale* par M. *Huygens*) que le mobile y pût jamais avoir. Ainſi au langage de M. *Huygens* la viteſſe AB (a), à laquelle dans tous les cas les viteſſes reſtantes TU (u) ſe réduiroient ici après un tems infini AT (t), ſeroit égale à la terminale du mobile dans le lieu ſuppoſé réſiſtant en raiſon des quarrez de ces viteſſes.

COROLLAIRE VIII.

Donc ſi la viteſſe AH (b) de projection verticale de haut en bas, ſe trouvoit égale à la terminale AB (a) du corps jetté, c'eſt à dire (*Corol.* 7.) à la plus grande qu'il pût jamais acquerir en vertu de ſa ſeule peſanteur conſtante en tombant dans le milieu ſuppoſé malgré les réſiſtances ſuppoſées de ce milieu; le mouvement de ce corps y ſeroit uniforme à l'infini dès le premier inſtant de ſa chute: puiſque ce cas de $u\ (b) = a$ dès ce premier inſtant, qui rend dès-lors (comme dans le Corol. 7.) la réſiſtance du milieu égale à la peſanteur du mobile, rendant ce corps par leur équilibre comme s'il n'avoit alors aucune peſanteur, ni le milieu aucune réſiſtance, rendroit auſſi pour lors la viteſſe de projection hors d'état d'être augmentée ni retardée, la peſanteur devant l'emporter ſur la réſiſtance pour le premier, & la réſiſtance ſur la peſanteur pour le ſecond; ce que leur égalité une fois arrivée ne permet plus.

Co-

COROLLAIRE IX.

Cette égalité de la peſanteur conſtante du mobile avec la réſiſtance du milieu ſuppoſé, rendant (*remarq.* 1. *pag.* 267.) $dr=dv=dt$, fait voir auſſi qu'alors la Courbe ARC des réſiſtances totales dégénere en une ligne droite parallele à FVC, & donne par là $AF=RV$ (*Solut.*)$=TU$: De ſorte que le Corol. 1, donnant auſſi $AF=AH$ (*byp.*)$=AB$, on retrouve encore ici TU (u)$=AB$ (a) conformément au précedent Corol. 8. C'eſt à dire (comme dans ce Corol. 8.) que dès que la viteſſe d'un corps jetté verticalement de haut en bas ſera égale à ſa terminale, le mouvement en ſera uniforme pour toûjours après cela. Par conſéquent lorſque la viteſſe AF ou AH de projection verticale de haut en bas, ſera égale à la terminale AB du corps ainſi jetté, la Courbe HUC dégénerera en une ligne droite confonduë avec ſon aſymptote BC.

COROLLAIRE X.

* Mais ſi la force ou viteſſe AH ou (*Corol.* 1.) AF (b) de projection étoit nulle, en ſorte que le mobile n'eût plus que ſa peſanteur pour deſcendre, ainſi que dans le Prob. de la pag. 249. Le point H ſe trouvant alors en A auſſi-bien que le point F, la Courbe HUC ſeroit non-ſeulement la même, mais auſſi dans la même poſition que dans ce Prob. de la pag. 249. qu'on voit n'être qu'un cas de celui-ci, lequel par conſéquent donneroit auſſi tous les Corollaires

* FIG. I.

res qu'on a tirez de celui-là, en faiſant ainſi AH $(b)=o$ dans tout ce qu'on voit ici & dans la ſuite.

COROLLAIRE XI.

* Il ſuit encore en general des Corol. 4. & 7. que les viteſſes TU (u) reſtantes de celle de projection verticale de haut en bas, & des primitivement accélerées dont elle eſt (*hyp.*) augmentée à la fin des tems AT, doivent être ici à la plus grande AB (a) que le mobile y puiſſe jamais avoir en vertu de ſa ſeule peſanteur, même après un tems infini :: $TU.AB$. Et qu'ainſi (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces ici parcourus en vertu de ces viteſſes reſtantes pendant les tems AT (t) doivent être à ce que le mobile en parcourroit en même tems d'une viteſſe uniforme égale à ſa terminale ou à la plus grande $AB :: ATUH.ATSB$.

COROLLAIRE XII.

Quant à la comparaiſon entr'eux des eſpaces ici parcourus eu vertu des viteſſes reſtantes TU (u) pendant les tems AT (t), on voit (*Lem.* 2. *pag.* 248.) que ces eſpaces doivent être ici entr'eux comme les aires correſpondantes $ATUH$ (*ſudt*). Mais la Solution (*art.* 1.) donnant $dt=\frac{aadu}{aa-uu}$ pour l'équation de la Courbe HUC des viteſſes reſtantes (u), l'on aura $\int udt$ $(ATUH)$ $=\int\frac{aaudu}{aa-uu}$. Cela étant,

I. Soit

* FIG. I. II. III.

I. Soit comme dans l'art. 2. du Corol. 6. de la pag. 254. $yy = aa - uu$, ou $y = \sqrt{aa-uu}$. L'on aura $ydy = -udu$; & par conſéquent $\int \frac{aaudu}{aa-uu} (ATUH) = -\int \frac{aaydy}{yy} = -\int \frac{aady}{y} =$ $= -aa \times ly + q = -aa \times l\sqrt{aa-uu} + q$. Mais le cas de $AT = 0$, qui rend auſſi $ATUH = 0$, & $TU\ (u) = AH\ (b)$, réduit cette intégrale à $0 = -aa \times l\sqrt{aa-bb} + q$, d'où réſulte $q = aa \times l\sqrt{aa-bb}$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH = aa \times l\sqrt{aa-bb} - aa \times l\sqrt{aa-uu}$ $= aa \times l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ pour tous les cas. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT, ſeront par tout ici entr'eux comme les $aa \times l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ correſpondantes, c'eſt à dire, comme les Logarithmes des fractions correſpondantes $\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$.

II. Il eſt à remarquer que les termes $\sqrt{aa-bb}$, $\sqrt{aa-uu}$, de ces fractions ne ſont réels que dans le cas de $a > b$, & de $a > u$, exprimé dans les fig. 1. 2. Et que dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, exprimé dans la fig. 3. l'un & l'autre de ces termes eſt imaginaire : cependant la fraction $\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ faite de ces imaginaires, ne laiſſe pas, non plus que ſon Logarithme $l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$, d'être

d'être auſſi réelle dans ce cas de la fig. 3. que dans celui des fig. 1. 2. où ces termes ſont tous deux réels. Pour le voir il n'y a qu'à multiplier l'un & l'autre par — 1, & l'on aura $\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}} = \frac{\sqrt{-aa+bb}}{\sqrt{-aa+uu}} = \frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$, fraction auſſi réelle dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, de la fig. 3. que $\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans celui de $a > b$, & de $a > u$, des fig. 1. 2.

Donc (*art.* 1.) les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$ ſeront par tout entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ correſpondantes dans les fig. 1 2. & comme les correſpondantes $aa \times l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. ou ſimplement (à cauſe de a conſtante) comme les Logarithmes correſpondans $l\frac{\sqrt{aa\ bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & comme les correſpondans $l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3.

III. Mais ſi du centre A, & du demi-diametre AB (a), on fait le quart de cercle $B\delta\beta$ dans les fig. 1. 2. Et l'hyperbole équilatere $B\delta I$ dans la fig. 3. Leſquels arcs ſoient rencontrez en Q, δ, par HQ, $U\delta$, paralleles à la droite CTA, laquelle prolongée dans les fig. 1. 2. rencontre auſſi le quart de cercle $B\delta\beta$ en β, en ſe confondant avec HQ dans la fig. 1. Soient menez les raions AQ, $A\delta$, dans le quart de cercle des fig.

fig. 1. 2. dans leſquelles, & dans la fig. 3. G eſt le point où $U\delta$ rencontre AB prolongée dans cette fig. 3. Cela fait, aiant (*Solut.*) dans toutes ces trois figures $AB = a$, $AH = b$, $AG = TU = u$, & les deux premieres fig. 1. 2. aiant de plus $A\delta = AB = a = AQ$; le quart de cercle $B\delta\beta$ y donnera $HQ = \sqrt{aa - bb}$, $G\delta = \sqrt{aa - uu}$; au contraire dans la fig. 3. l'hyperbole $B\delta I$ donnera $HQ = \sqrt{bb - aa}$, $G\delta = \sqrt{uu - aa}$. Donc on aura ici $l\frac{HQ}{G\delta} = l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $l\frac{HQ}{G\delta} = l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. Mais l'art. 2. vient de donner $l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. pour l'expreſſion des eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT. Donc ces eſpaces ſeront auſſi entr'eux dans toutes ces trois figures, c'eſt à dire dans tous les cas poſſibles, comme les Logarithmes $l\frac{HQ}{G\delta}$ des fractions correſpondantes $\frac{HQ}{G\delta}$, ou (ce qui revient au même) comme les Logarithmes des raiſons de l'ordonnée conſtante HQ aux variables $G\delta$ correſpondantes à ces tems AT.

IV. Mais après avoir pris $A\beta = AB = a$ ſur CTA prolongée dans la fig. 3. comme ci-deſſus dans les fig. 1. 2. ſoit imaginée dans toutes trois par β une Logarithmique $I\beta O$ d'une ſoûtangente

te $= A\beta(a) = 1$ sur l'asymptote BA prolongée vers O, de laquelle cette Logarithmique s'approche de ce côté-là, étant rencontrée en γ, μ, par $Q\gamma$, $\delta\mu$, paralleles à BO; desquels points γ, μ, soient les ordonnées $\gamma\Phi$, $\mu\psi$, paralleles à βA, & qui rencontrent BO en Φ, ψ. Cela fait, puisque (*hyp.*) $A\beta = 1$, l'on aura $A\psi = -l\psi\mu = -lG\delta$, & $A\Phi = \mp l\Phi\gamma \mp lHQ$, ou $\mp A\Phi = l\Phi\gamma = lHQ$, les signes superieurs étant pour les fig. 1. 2. & les inferieurs pour la fig. 3. Donc $l\frac{HQ}{G\delta} = lHQ - lG\delta = \mp A\Phi + A\psi = \Phi\psi$. Par conséquent (*art.* 3.) les espaces parcourus pendant les tems AT, seront pareillement ici comme les abscisses $\Phi\psi$ correspondantes sur BO depuis l'origine Φ vers O dans tous les cas.

V. La même chose se peut encore trouver indépendemment de ce qui précede, en imaginant dans les fig. 1. 2. 3. une petite droite mn parallele à $\delta\mu$ infiniment près d'elle, & qui rencontre $\mu\psi$, βO, en m, n. Car ces trois figures donneront $\Phi\gamma = HQ\sqrt{\mp aa \mp bb}$, $\psi\mu = G\delta = \sqrt{\mp aa \mp uu}$, & conséquemment $\mu m = \frac{\mp udu}{\sqrt{\mp aa \mp uu}}$: les signes superieurs étant encore par tout ici pour les figures 1. 2. & les signes inferieurs pour la figure 3. De sorte que la Logarithmique $I\beta O$ aiant (*hyp.*) sa soûtangente $= A\beta = a = 1$, l'on aura par tout ici $\mu\psi$ $(\sqrt{\mp aa \mp uu}).a :: \mu m \left(\frac{\mp udu}{\sqrt{\mp aa \mp uu}}\right). -mn =$ $= \frac{\mp audu}{\mp aa \mp uu}$. c'est à dire (en multipliant par -1)

$mn = \frac{\mp audu}{\mp aa \mp uu}$. Par conſéquent $\int \frac{\mp audu}{\mp aa \mp uu}$ $= \int mn = A\psi + q$, ou $a \times A\psi + q =$ $= \int \frac{\mp aaudu}{\mp aa \mp uu} = \int \frac{aaudu}{aa - uu} = \int udt = ATUH$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rendant $G\delta$ en HQ, où $\mu\psi$ en $\gamma\Phi$, rend $A\psi = \mp A\Phi$, réduit cette intégrale à $0 = \mp a \times A\Phi + q$, d'où reſulte $q = \mp a \times A\Phi$. Donc $ATUH$ $= a \times A\psi \mp a \times A\Phi = a \times \Phi\psi$ eſt cette intégrale juſte & préciſe. Par conſéquent (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT, doivent être encore par tout ici entr'eux comme les grandeurs $a \times \Phi\psi$, ou (à cauſe de a conſtantes) comme les abſciſſes $\Phi\psi$ correſpondantes, ainſi que dans le précédent art. 4.

VI. Le raport de ces eſpaces entr'eux peut encore ſe trouver par les Methodes de M. *Leibniz*, & de M. (*Jean*) *Bernoulli*, pour integrer les fractions rationelles, à peu près comme dans le Corol. 6. art. 6. des pag. 254 255. 256. 257. dont le cas eſt ici celui de la fig. 1. Car ces Méthodes donnant $\frac{udu}{aa - uu} =$ $= \frac{1}{2} \times \frac{du}{a - u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a + u}$, l'on aura (en intégrant) $\int \frac{aaudu}{aa - uu}$ $(\int udt) = -\frac{aa}{2} \times l\overline{a - u} - \frac{aa}{2} \times$ $l\overline{a + u} + q$ dans la ſuppoſition de $a = 1$, le Logarithme de $a - u$ devant y être négatif, ſoit que a ſe trouve plus grand que u, comme dans les fig. 1. 2. ou qu'elle ſe trouve moindre, comme dans la fig 3. parce que la grandeur $a - u$ ſeroit plus petite que l'unité dans le premier cas, & négative dans le ſecond. Mais celui de

ſudt $(ATUH) = 0$, rendant (*Corol.* 1.) $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = -\frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b} + q$, d'où réſulte $q = \frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b}$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH = \frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a-u} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a+u} = \frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{a+b}{a+u}$ pour tous les cas. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT, ſeront par tout ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{a+b}{a+u}$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de la fraction conſtante $\frac{aa}{2}$) comme les correſpondantes $l\frac{a-b}{a-u} + l\frac{a+b}{a+u}$, c'eſt à dire, en raiſon des ſommes des Logarithmes des fractions $\frac{a-b}{a-u}, \frac{a+b}{a+u}$, correſpondantes.

VII. La même choſe peut ſe trouver encore par le moien de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, trouvée dans l'art. 2. de la Solution. Car cet art. 2. donnant auſſi $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, l'on aura ici $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{xdx - adx}{xx+ax} = \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} - \frac{a^3}{2} \times \frac{dx}{xx+ax}$.

Mais

Mais en prenant de plus $\frac{aa}{s} = x$, l'on aura $dx = -\frac{aads}{ss}$, $x + a = a + \frac{aa}{s} = \frac{as + aa}{s}$, $xx + ax = \frac{a^3 s + a^4}{ss}$; & par conséquent $\frac{dx}{xx + ax} = \frac{-aads}{a^3 s + a^4} = -\frac{1}{a} \times \frac{ds}{a+s}$, ou $-\frac{a^3}{2} \times \frac{dx}{xx + ax} = \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$. Donc $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} + \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$, & $\int udt = \frac{aa}{2} \times l\overline{a+x} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+s} + q$.

Or l'équation $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$ donne $x = \frac{aa+au}{a-u}$: de sorte qu'aiant auſſi $x = \frac{aa}{s}$, l'on aura pareillement ici $\frac{aa}{s} = \frac{aa+au}{a-u}$, ou $s = \frac{aa-au}{a+u}$; & de ces valeurs de x, s, il réſulte $a + x = a + \frac{aa+au}{a-u} = \frac{aa-au+aa+au}{a-u} = \frac{2aa}{a-u}$, & $a+s = a + \frac{aa-au}{a+u} = \frac{aa+au+aa-au}{a+u} = \frac{2aa}{a+u}$. Donc $\int udt = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+u} + q$.

Mais le cas de $\int udt\ (ATUH) = 0$, rendant $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b} + q$, d'où réſulte $q = -\frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b}$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+u}$ -

$l\frac{2aa}{a+u} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b} = \frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{a+b}{a+u}$, comme dans le précedent art. 6. Donc auſſi (*Lem. 2. pag.* 248.) les eſpaces parcourus ſeront encore ici, comme là, en raiſon des ſommes des Logarithmes des fractions $\frac{a-b}{a-u}$, $\frac{a+b}{a+u}$, correſpondantes.

VIII. Pour voir comment ces deux derniers articles s'accordent avec les précedens, il n'y a qu'à conſiderer que ſuivant la nature des Logarithmes, la ſomme de deux Logarithmes vaut toûjours le Logarithme du produit des deux grandeurs dont ils ſont Logarithmes, & que la moitié du Logarithme de ce produit vaut auſſi toûjours le Logarithme de la racine de ce même produit : ſuivant cela on verra que $l\frac{a-b}{a-u} + l\frac{a+b}{a+u} = l\frac{\overline{a-b} \times \overline{a+b}}{\overline{a-u} \times \overline{a+u}} = l\frac{aa-bb}{aa-uu}$, & $\frac{1}{2} \times l\frac{aa-bb}{aa-uu} = l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Donc $\frac{1}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{1}{2} \times l\frac{a+b}{a+u} = l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Par conſéquent les eſpaces exprimez par le premier membre de cette derniere égalité dans les art. 6. 7. ſont les mêmes que le ſecond membre de cette même égalité exprime dans les articles qui les précedent. Ainſi tous ces articles ſont parfaitement d'accord entr'eux touchant les eſpaces dont ils donnent les rapports.

IX. Ces mêmes eſpaces ſe trouveront auſſi par des *ſeries* ou ſuites infinies, en continuant

à l'infini la diviſion de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ comme l'on a fait l'art. 8. du Corol. 6. pag. 258. Car cette diviſion infinie donnant $\frac{acudu}{aa-uu}(\int udt) = \pm udu \pm \frac{u^3du}{aa} \pm \frac{u^5du}{a^4} \pm \frac{u^7du}{a^6} \pm \frac{u^9du}{a^8} \pm$ &c. dont les ſignes ſuperieurs ſont pour les fig. 1. 2. dans leſquelles $a > u$ rend la differentielle de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ poſitive, & les infericurs pour la fig. 3. dans laquelle $a < u$. rend cette differentielle negative; l'on aura, en intégrant, $\int udt$ $(ATUH) = \pm \frac{uu}{2} \pm \frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a^6} \pm \frac{u^{10}}{10a^8} \pm$ &c. $+q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = \pm \frac{bb}{2} \pm \frac{b^4}{4aa} \pm \frac{b^6}{6a^4} \pm \frac{b^8}{8a^6} \pm \frac{b^{10}}{10a^8} \pm$ &c. $+q$; d'où réſulte $q = \mp \frac{bb}{2} \mp \frac{b^4}{4aa} \mp \frac{b^6}{6a^4} \mp \frac{b^8}{8a^6} \mp \frac{b^{10}}{10a^8} \mp$ &c. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH = \pm \frac{uu}{2} \pm \frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a} \pm \frac{u^{10}}{10a^8} \pm$ &c. . . . . $\mp \frac{bb}{2} \mp \frac{b^4}{4aa} \mp \frac{b^6}{6a^4} \mp \frac{b^8}{8a^6} \mp \frac{b^{10}}{10a^8} \mp$ &c. Les ſignes ſuperieurs étant encore pour le cas des fig. 1. 2. & les inferieurs pour celui de la fig. 3. Donc (*Lem.* 2. *p.* 248.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$, ſeront encore ici dans tous les cas comme ces *ſeries* ou ſuites correſpondantes continuées à l'infini.

COROLLAIRE XIII.

* Le raport de ces eſpaces parcourus pendant les tems AT, peut encore ſe trouver par le moien d'une hyperbole équilatere IXO qui paſſe par l'angle X d'un quarré $ABYX$ fait ſur AB, entre les aſymptotes BI, BA prolongée vers O, tout ce qu'on voit des fig. 1. 2. 3. dans les fig. 4. 5. 6. y demeurant le même que là. Car ſi par le point Q, & par chaque point δ, dans leſquels le quart de cercle $B\delta\beta$ des fig. 4. 5. & l'hyperbole $B\delta I$ de la fig. 6. ſont rencontrez par HQ, $U\delta$, paralleles à BI, on mene les ordonnées MN, & RZ avec ſon infiniment proche rz, leſquelles rencontrent l'hyperbole IXO en N, Z, z, & ſon aſymptote BI en M, R, r; cette hyperbole donnera $RZ = \frac{AB \times AX}{BR} = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, à cauſe que (*hyp.*) $AX = AB = a$, & que $BR = G\delta = \sqrt{\pm aa \mp uu}$, dont les ſignes ſuperieurs ſont pour les fig. 4. 5. & les inferieurs pour la fig. 6. Ce qui donne auſſi $Rr = \frac{udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, en differentiant par $+$ les $-uu$ $(-TU \times TU)$ dans les fig. 4. 5. dans leſquelles les TU croiſſent alternativement avec les BR ou $G\delta$, au lieu qu'elles croiſſent ou plûtôt décroiſſent enſemble dans la fig. 6. dans laquelle $+uu$ $(TU \times TU)$ vient pour cela d'être differentiée par ſon propre ſigne $+$. Donc auſſi $\pm Rr = \frac{\mp udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$. Par conſéquent $\pm RZ \times Rr$

* FIG. IV. V. VI.

$Rr\ (ZRrz) = \frac{\mp aaudu}{\mp aa \mp uu} = \frac{aaudu}{aa - uu}$ (*Corol.* 12.) $= udt$. Donc $\int udt\ (ATUH) = \mp \int RZ \times Rr = \mp OBRZO + q$, en changeant $\pm$ en $\mp$, à cauſe que $OBRZO$ diminuë par tout ici à meſure que $ATUH$ croît. Mais le cas de $ATUH = o$, rendant TU en AH, RZ en MN, & $OBRZO = OBMNO$, réduit cette intégrale à $o = \mp OBMNO + q$, d'où réſulte $q = \pm OBMNO$. Donc cette intégrale complette eſt $ATUH = \pm OBMNO \mp OBRZO = \pm NMRZ$ (à cauſe que du des fig. 4. 5. ſe change en $-du$ dans la fig. 6.) $= NMRZ$. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT, ſont entr'eux comme les aires hyperboliques $NMRZ$ correſpondantes.

COROLLAIRE XIV.

* Outre les manieres précedentes (*Corol.* 12. & 13.) de trouver les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT, en voici encore une pour les trouver auſſi dans tous les cas poſſibles par le moien d'une hyperbole équilatere quelconque $D\pi I$ ajoûtée préſentement aux trois précedentes figures entre les aſymptotes orthogonales AB, BI, dans les fig. 1. 2. après y avoir prolongé CB vers I; & entre les orthogonales BK, BI, dans la fig. 3. après y avoir auſſi prolongé CB vers I, & de plus AB vers K: c'eſt à dire en general après avoir pris $B\Delta = AB$ dans la fig. 3. & avoir ajoûté Δ en A dans les fig. 1. 2. pour l'uniformité de l'expreſſion) par le moien d'une hyperbole équilatere quel-

* FIG. I. II. III.

quelconque $D\pi I$ entre ſes aſymptotes orthogonales BI, $B\Delta$, dans les fig. 1. 2. 3. Pour le voir,

I. Soient priſes par tout dans les fig. 1. 2. 3. $A\Pi . AG :: AG . AB$. Et $AK . AH :: AH . AB$. Enſuite après avoir mené des points Δ, Π, K, les ordonnées ΔD, $\Pi\pi$; KY, paralleles à BI, & qui rencontrent l'hyperbole $D\pi I$ en D, π, Y; ſoient encore (comme ci-deſſus) $AH = b$, $AT = t$, $AG\,(TU) = u$; & de plus les variables $A\Pi = m$, $\Pi\pi = n$, avec les conſtantes $\Delta D = c$, $B\Delta\,(AB) = a$: delà réſulte $B\Pi = a - m$ dans les fig. 1. 2. & $B\Pi = m - a$ dans la fig. 3. c'eſt à dire en general $B\Pi = \pm a \mp m$, dont les ſignes ſuperieurs ſont pour les fig. 1. 2. & les inferieurs pour la fig. 3.

II. Cela poſé, l'on aura $AB\,(a) . AG\,(u) :: AG\,(u) . A\Pi\,(m) = \frac{uu}{a}$. Et conſéquemment auſſi $dm = \frac{2udu}{a}$. Mais l'hyperbole $D\pi I$ donne auſſi $B\Pi\,(\pm a \mp m) . B\Delta\,(a) :: \Delta D\,(c) . \Pi\pi\,(n) = \frac{ac}{\pm a \mp m}$ (en multipliant le haut & le bas de cette fraction par ± 1) $= \frac{\pm ac}{a - m}$ (à cauſe que $m = \frac{uu}{a}$ donne $a - m = a - \frac{uu}{a} = \frac{aa - uu}{a}$) $= \pm \frac{aac}{aa - uu}$. Donc en géneral $ndm = \pm \frac{2acudu}{aa - uu}$, ou (en multipliant le tout par $\pm \frac{a}{2c}$) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa - uu}$ (*Corol.* 12.) $= udt$. Par conſéquent, en intégrant, l'on aura $\int udt\,(ATUH) \pm$

$\pm\frac{a}{2c}\times fndm=\mp\frac{a}{2c}\times \Upsilon K\Pi\pi+q$, les $\Upsilon K\Pi\pi$ croiſſant avec les $ATUH$. Mais le cas de $ATUH=0$, qui rendant $AG=AH$, rend auſſi (*art.* 1.) $A\Pi=AK$, & conſéquemment $\Upsilon K\Pi\pi=0$, réduit cette intégrale à $0=0+q$. Donc $ATUH\ (fudt)=\pm\frac{a}{2c}\times\Upsilon K\Pi\pi$ (à cauſe que du des fig. 1. 2. ſe change en $-du$ dans la fig. 3.) $=\frac{a}{2c}\times\Upsilon K\Pi\pi$ ſera cette intégrale juſte & préciſe. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$ en vertu des viteſſes reſtantes ou effectives $TU(u)$ ſeront entr'eux comme les aires hyperboliques $\Upsilon K\Pi\pi$ correſpondantes.

III. Il eſt manifeſte qu'au lieu de prendre $fudt\ (ATUH)=\pm\frac{a}{2c}\times fndm=\pm\frac{a}{2c}\times\Upsilon K\Pi\pi+q$ pour l'intégrale cherchée dans l'art. 2. comme l'on y vient de faire, on y auroit pû prendre auſſi $fudt\ (ATUH)=\pm\frac{a}{2c}\times fndm=\frac{a}{2c}\times D\Delta\Pi\pi+q$ pour cette intégrale. Car puiſque le cas de $ATUH=0$, qui rend (*art.* 2.) $A\Pi=AK$, & conſéquemment $D\Delta\Pi\pi=\pm D\Delta K\Upsilon$, ſavoir $D\Delta\Pi\pi=D\Delta K\Upsilon$ dans les fig. 1. 2. où ces grandeurs ſont également poſitives, & $D\Delta\Pi\pi=-D\Delta K\Upsilon$ dans la fig. 3. où la ſeconde de ces grandeurs eſt négative par raport à la premiere ; réduiroit la ſeconde intégrale $ATUH=\frac{a}{2c}\times D\Delta\Pi\pi+q$ à $0=\pm\frac{a}{2c}$

$\times D\Delta KY + q$, d'où réſulte $q = \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY$: il eſt, dis-je, manifeſte que cette ſeconde intégrale complette ſeroit $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\pi \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi$, c'eſt à dire, encore $ATUH = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi$, de même que de la premiere $ATUH = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi + q$ dans l'art. 2.

IV. Il eſt encore viſible qu'on auroit auſſi trouvé la même intégrale complette en prenant $\int udt\,(ATUH) = \pm \frac{a}{2c} \times \int n\,dm = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\pi I + q$. Car puiſque le cas de $ATUH = o$, qui rend (*art.* 2.) $A\Pi = AK$, & conſéquemment $IB\Pi\pi I = IBKYI$, réduiroit cette intégrale à $o = -\frac{a}{2c} \times IBKYI + q$, d'où réſulteroit $q = \frac{a}{2c} \times IBKYI$; cette intégrale complette ſeroit encore ici $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\pi I + \frac{a}{2c} \times IBKYI = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi$, comme dans les art. 2. 3.

V. Donc (*art.* 2. 3. 4.) les trois intégrales primitives $ATUH = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi + q$, $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\pi + q$, $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\pi I + q$, donneront également ici $ATUH = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\pi$: c'eſt à dire par tout (*Lem.* 2.

pag.

pag. 248.) que les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$ en vertu des viteſſes TU (u), ſeront entr'eux comme les aires hyperboliques correſpondantes $\Upsilon K \Pi\pi$.

* VI. Donc auſſi le cas de de la viteſſe AF ou (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 248.) $AH = 0$, c'eſt à dire, des viteſſes commencées à zero, rendant (*art.* 1.) $AK = 0$, & conſéquemment $K\Upsilon$ en AD dans la fig. 1. les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT, ſeront en ce cas entr'eux comme les aires hyperboliques correſpondantes $DA\Pi\pi$, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 9. de la pag. 261.

COROLLAIRE XV.

† I. Si l'on conſidere preſentement que $\frac{du}{aa-uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a-u} + \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a+u}$, & que la Solution donne (*art.* 1.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$; l'on aura ici en général $dt\left(\frac{aadu}{aa-uu}\right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a-u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a+u}$, dont l'intégrale eſt $t(AT) = -\frac{a}{2} \times \overline{la-u} + \frac{a}{2} \overline{la+u} + q = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} + q$, le Logarithme de $a-u$ devant être négatif pour la raiſon raportée dans l'art. 6. du Corol. 12. Mais le cas de $A(t) = 0$, qui rend $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{a}{2} \times l\frac{a+b}{a-b} + q$, d'où réſulte $q = -\frac{a}{2} \times l\frac{a+b}{a-b}$. Donc cette intégrale complette

* FIG. I. † I. II. III.

plette ſera $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} l\frac{a+b}{a-b}$. Donc les tems AT (t) emploiez à parcourir les eſpaces trouvez dans les Corol. 12. 13. 14. y ſeront en général, c'eſt à dire, dans tous les cas des fig. 1. 2. 3. comme les grandeurs correſpondantes $\frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} \times l\frac{a+b}{a-u}$, ou ſimplement (à cauſe de $\frac{a}{2}$ conſtante) comme les differences $l\frac{a+u}{a-u} - l\frac{a+b}{a-b}$ des Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, $l\frac{a+b}{a-b}$, correſpondans.

II. Cela ſuit encore de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$ trouvée dans l'art. 2. de la Solution en y ſuppoſant $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$. Car cette ſuppoſition donnant $ax - aa = xu + au$, ou $ax - xu = aa + au$, d'où réſulte $x = \frac{aa+au}{a-u}$; l'équation $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, donnera encore en general (en intégrant) $t\,(AT) = \frac{a}{2} \times l\,x + q = \frac{a}{2} \times l\frac{aa+au}{a-u} + q$ (en prenant $a = 1$) $= \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} + q$; d'où réſultera (comme dans l'art. 1.) $AT\,(t) = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} l\frac{a+b}{a-b}$ pour cette intégrale complette; & conſéquemment les tems AT (t) emploiez à parcourir les eſpaces trouvez dans les précédens Corol. 12. 13. 14.

14. seront encore ici en même raison que dans l'art. 1.

III. Ces art. 1. & 2. fournissent encore une nouvelle construction de la Courbe *HUC* des vitesses restantes (*u*) malgré les résistances supposées. Car si après avoir fait les orthogonales *AB*, *ATC*, on prend les abscisses *AG* de la premiere *AB* (prolongée du côté de *B* dans la fig. 3.) pour ces vitesses restantes ou actuelles (*u*), & que de la même origine *A* on prenne sur *ATC* les abscisses $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} = \frac{a}{2} \times l\frac{a+b}{a-b} = \frac{a}{2} \times l\frac{\overline{a+u} \times \overline{a-b}}{\overline{a-u} \times \overline{u+b}}$; il suit en general des art. 1. 2. que la ligne *HUC*, qui passera par tous les points *U* des parallelogrammes rectangles *AGUT* faits chacun des deux coordonnées *AG* (*u*), *AT* (*t*), ainsi trouvées, sera la Courbe cherchée des vitesses effectives ou restantes (*u*), laquelle servira ici, comme dans l'art. 5. de la Solution, à construire l'autre Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perduës.

IV. De ce que (*art.* 3.) $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{\overline{a+u} \times \overline{a-b}}{\overline{a-u} \times \overline{a+b}}$ il est encore manifeste que le cas de $u = a$, rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$, rendra aussi pour lors AT (*t*) $= \frac{a}{2} \times l\frac{2a \times \overline{a-b}}{0 \times \overline{a+b}} = \frac{a}{2} \times l\frac{2aa-2ab}{0}$ infini : c'est à dire non seulement qu'il faudroit ici dans toutes les fig. 1. 2. 3. un tems infini pour rendre u (*TU*) $= a$ (*AB*); mais encore que l'on y auroit u (*TU*) $= a$ (*AB*) à la fin d'un tel tems, pen-

pendant tout lequel les viteſſes TU (*Corol.* 2.3.) augmenteroient ou diminueroient toûjours juſqu'à ce qu'elles fuſſent enfin devenuës égales à cette terminale AB. D'où il réſulte encore que BC doit être une aſymptote de la Courbe HUC dans tous les cas ; & que la viteſſe ne peut être ici uniforme depuis le commencement juſqu'à la fin, que lorſque la premiere $AH(b)$ eſt égale à la terminale AB (a), ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 4. 7. 8. 9. dont ceci eſt encore une preuve nouvelle.

L'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ *de la Courbe* HUC *des viteſſes reſtantes* (u) *étant ici* (Solut. art. 1.) *la même que dans l'art.* 2. *de la Solut.* 1. *du Probl. des pag.* 250. 251. 252. *avec cette ſeule difference que le cas de* AT (t) = 0, *qui rend là* TU (u) = 0, *rend ici* TU (u) = AH (b) ; *il eſt manifeſte que les deux Remarques faites ſur ce Problême-là dans les pag.* 267. 268. 269. *touchant le raport qu'y ont entr'elles* la peſanteur du mobile, la réſiſtance qui s'oppoſe à ſa chute à chaque inſtant ; & la difference ou l'excès de force dont cette peſanteur ſurpaſſe cette réſiſtance : *il eſt, dis-je, manifeſte que ces deux Remarques des pag.* 267. 268. 269. *conviennent auſſi en tout à ce Problême-ci, excepté que le cas de* t = 0, *rend là* u = 0, *& ici* u = b. *Ce ſeroit donc une repetition inutile que de les raporter ici.*

SCHOLIE.

I. Pour ce qui eſt la Courbe KEC des réſiſtances inſtantanées (dr), dont les ordonnées ſont (*hyp.*) $ET = z$ $(dr) = \frac{uu}{a}$, on trouvera (com-

(comme dans le Schol. de la pag. 270.) que ſon équation eſt $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$. Mais cette équation, qui dans le Schol. de la pag. 270. faiſoit paſſer cette Courbe par A, la fait paſſer ici par K dans tous les cas poſſibles, aiant ſon ordonnée $AK\ (z) = \frac{bb}{a}$ (*hyp.*) $= \frac{AF \times AF}{AB}$ (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 249.) $= \frac{AH \times AH}{AB}$, c'eſt à dire (*Corol.* 14. *art.* 1.) la même que l'abſciſſe aſymptotique AK de l'hyperbole $\Upsilon\pi I$; puiſque $u = b$ (*Corol.* 1.) en A, y rend $z\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{bb}{a}$.

II. Par la même raiſon l'on aura par tout $TE = A\Pi$; puiſque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a}$, & que (*Corol.* 14. *art.* 1.) $A\Pi = \frac{AG \times AG}{AB} = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{uu}{a}$. D'où l'on voit que le point E de rencontre des droites $\pi\Pi$, TU, prolongées de ce côté-là; ſera un des points de la Courbe KEC; & ainſi de tous ſes autres points à l'infini.

III. On voit auſſi de là, ſuivant le Corol. 14. que ſi l'on eût tracé d'abord la Courbe KEC en y prenant par tout $TE = \frac{TV \times TV}{AB}$ correſpondante, c'eſt à dire, TE troiſiéme proportionnelle à AB, TU correſpondante; & qu'après avoir auſſi tracé une hyperbole équilatere quelconque $\Upsilon\pi I$ entre les aſymptotes orthogonales $B\Delta$, BI, on eût mené des points K, E, de la Courbe KEC, les droites $K\Upsilon$, $E\pi$, paralleles à BI, leſquelles euſſent rencon-

contré l'hyperbole $\Upsilon\pi I$ en Υ, π, & ſon autre aſymptote $B\Delta$ en K, Π; le Corol. 14. fait, dis-je, voir que l'on auroit eu pour lors, & pour tous les cas poſſibles, les aires hyperboliques $\Upsilon K\Pi\pi$ en raiſon des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT correſpondans.

IV. L'équation (*art.* 1.) $TE = z = \frac{uu}{a} = \frac{TV \times TV}{AB}$ faiſant voir que les TE augmentent ou diminuent avec les TV, il eſt manifeſte que puiſque la Courbe HUC (*Corol.* 4.) s'approche continuellement de la droite BC à meſure que AT augmente, juſqu'à ce que AT infinie ait rendu $TV = AB$, & conſéquemment $TE = \left(\frac{TV \times TV}{AB}\right) = \frac{AB \times AB}{AB} = AB$; la Courbe KEC doit auſſi toûjours s'approcher de la droite BC juſqu'à ce que AT infinie ait auſſi rendu $TE = AB$. D'où l'on voit que cette droite BC doit être une aſymptote de la Courbe KEC de même qu'elle en eſt une (*Corol.* 4.) de la Courbe HUC.

V. L'équation générale (*art.* 1.) $dt = \pm \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$ ſe changeant en $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{bb} - \frac{2bb}{a} \times \sqrt{bb}} = \frac{a^3 dz}{2aab - 2b^3}$ au point A, qui (*art.* 1.) y rend $z\,(AK) = \frac{bb}{a}$; il eſt aiſé de voir que dans tous les cas poſſibles la rencontre en K de la Courbe KEC avec la premiere $AK\left(\frac{bb}{a}\right)$ de ſes ordonnées $TE\,(z)$, doit

ſe

se faire sous un angle BKE dont le sinus soit à celui de son complement :: $a^3 . 2aab - b^3$. De sorte que le cas de $b = 0$ de la fig. 1. y rendra le premier de ces sinus au second :: $a^3 . 0$. Par conséquent la Courbe KEC y sera touchée en A par son axe ATC, ainsi qu'on l'a déja vû pour ce cas dans le Schol. nomb. 1. de la pag. 270.

VI. Cette même équation $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$ ou $aadz = 2adt\sqrt{az} - 2zdt\sqrt{az}$, differentiée (en faisant dt constante) donnant $aaddz = \frac{aadtdz}{\sqrt{az}} - \frac{azdtdz}{\sqrt{az}} - 2dtdz\sqrt{az} = \frac{aa - az - 2az}{\sqrt{az}} \times dtdz = \frac{aa - 3az}{\sqrt{az}} \times dtdz$; & la Courbe KEC exprimée (*art.* 1.) par cette équation générale, aiant $ddz = 0$ en son point d'inflexion, si elle en a un; l'on y aura $0 = \frac{aa - 3az}{\sqrt{az}} \times dtdz$, ou simplement $0 = aa - 3az$; ce qui donnant $z = \frac{1}{3}a$, fait voir que cette Courbe KEC a effectivement un point d'inflexion, mais seulement dans les cas qui peuvent donner $z = \frac{1}{3}a$. c'est à dire $TE = \frac{1}{3}AB$. D'où il suit

1°. Que le cas de la fig. 3. dont la moindre des ordonnées $TE(z)$ est (*art.* 4.) $= AB(a)$, en est exclus.

2°. Que les cas de $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$, $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, en sont aussi exclus dans les fig. 1. 2. puisque la plus petite des $ET(z)$ y étant (*art.* 4. 5.) $= AK = \frac{bb}{a}$, il ne pourroit jamais y avoir de z $(ET) = \frac{1}{3}a$,

si $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$; & que si $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, la premiere AK $\left(\frac{bb}{a}\right)$ des ordonnées ET (z) seroit elle-même cette $ET(z) = \frac{1}{3}a$.

3°. Donc (*nomb.* 1. 2.) la Courbe KEC ne peut avoir de point d'inflexion que dans les fig. 1. 2. & seulement lorsque $\frac{bb}{a} < \frac{1}{3}a$, c'est à dire, seulement lorsque $b < a\sqrt{\frac{1}{3}}$: dans lequel cas elle en aura toûjours un à l'extrémité E d'une ordonnée $TE(z) = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}AB$. Ce qui fait voir que dans la fig. 2. qui ne demande (*hyp.*) que $b < a$, cette Courbe en aura quelquefois un, & quelquefois n'en aura point, selon que $\frac{bb}{a}$ y sera moindre, égale, ou plus grande que $\frac{1}{3}a$; Mais dans la fig. 1. qui exige (*hyp.*) $b = 0$, elle en aura toûjours un, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 2. du Schol. de la pag. 270. pour ce même cas de $b = 0$, ou de K en A.

AUTRE SOLUTION.

I. *On vient de trouver (*Sol.* 1. *art.* 1.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ pour l'équation de la Courbe HUC des viteſſes ici reſtantes (u). Soit preſentement $\frac{+a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa + \frac{a^4}{ss} = \frac{aass+a^4}{ss}$, dont les ſignes ſuperieurs ſont pour le cas de $a\,(AB) > b\,(AF)$ dans les fig. 7. 8. & les inferieurs pour le cas de $a\,(AB) < b\,(AB)$ dans la fig. 9. ajoûtant dans toutes trois $AB = a$ à la conſ-

* FIG. VII. VIII. IX.

construction génerale du Lem. 1. pag. 246. comme dans les fig. 1. 2. 3. de la Solut. 1. L'on aura par tout ici $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss \mp aa}$, & $du = \frac{-ads\sqrt{ss \mp aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss \mp aa}}}{ss} = \frac{-assds \pm a^3 ds + assds}{ss\sqrt{ss \mp aa}}$ $= \frac{\pm a^3 ds}{ss\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\frac{du}{aa - uu}\left(\frac{dt}{aa}\right) = \frac{\pm ds}{\pm a\sqrt{ss \mp aa}}$ $= \frac{ds}{a\sqrt{ss \mp aa}}$, ou $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$: c'est à dire $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}$ pour le cas de $a > b$ dans les fig. 7. 8. & $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss + aa}}$ pour celui de $a < b$ dans la fig. 9. lesquelles équations sont à une même hyperbole équilatere * $SMPC$ differemment placée sur chacun de ses axes conjuguez, aiant son demi-axe transverse $OS = a = AB$; ses abscisses $OQ = s$ prises depuis son centre O sur celui de ses axes qui passe par son sommet S dans le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. & sur son axe conjugué dans le cas de $a < b$ de la fig. 9. & ses appliquées à ces axes, savoir les interieures correspondantes $QP = \sqrt{ss - aa}$ dans le premier cas, & les exterieures correspondantes $QP = \sqrt{ss + aa}$ dans le second: c'est à dire en général $QP = \sqrt{ss \mp aa}$, dont $-$ est pour les fig. 7. 8. & $+$ pour la fig. 9.

II Pour placer presentement cette hyperbole par

* *Toutes les lettres A, Δ, M, H, F, N, λ, S, K, dans la fig. 7. appartiennent au même point A : on n'en a mis une partie en ligne, que faute de place autour de ce point.*

par raport au reſte commun (*Lem. 1. pag.* 246.) à la premiere Solution & à celle-ci, il faut trouver la diſtance AO du centre O de cette hyperbole à l'origine A des expreſſions AT des tems (t) écoulez depuis le commencement du mouvement. Pour cela il faut conſiderer qu'en prenant encore ici leurs perpendiculaires correſpondantes TU pour les viteſſes (u) reſtantes des primitives TV (v) à la fin de ces tems AT (t) malgré les réſiſtances ſuppoſées, deſquelles viteſſes reſtantes TU (u) la premiere ſoit AH (*Lem. 1. art. 4. pag.* 248.) $= AF$ (b) initiale ſuppoſée; TU en AH au commencement du mouvement, y doit rendre $u = b$. Ainſi l'équation (*art.* 1.) $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$, rendant $s\,(OQ) = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, TU en AH perpendiculaire en A avec AF ſur OC, doit auſſi y rendre $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$. Par conſéquent la plus petite OA des abſciſſes OQ (s) ici néceſſaires, doit y être $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$; & ſon ordonnée correſpondante $QP = \sqrt{ss \mp aa} = \sqrt{\frac{a^4}{\pm aa \mp bb} \mp aa} =$ $= \sqrt{\frac{a^4 - a^4 + aabb}{\pm aa \mp bb}} = \frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$ alors en AM perpendiculaire au point A ſur OC de même que AB, AH, AF: c'eſt à dire, $OA = \frac{aa}{\sqrt{aa - bb}}$, $AM = \frac{ab}{\sqrt{aa - bb}}$ dans les fig. 7. 8. & $OA = \frac{aa}{\sqrt{bb - aa}}$,

AM

$AM = \frac{ab}{\sqrt{bb-aa}}$ dans la fig. 9. De ſorte qu'on aura dans toutes $OA. AM :: a.b :: AB. AH.$

III. Donc en continuant de prendre par-tout de l'origine A vers C ſur ATC, les abſciſſes AT (t) pour les tems écoulez depuis le commencement du mouvement, ſi l'on prend $AO = \frac{aa}{\sqrt{aa-bb}}$ ſur CTA prolongée vers O, $OS = a$ ſur OA depuis le centre O vers A, dans les fig. 7. 8. Et $AO = \frac{aa}{\sqrt{bb-aa}}$ encore ſur CTA prolongée vers O, $OS = a$ ſur ſa perpendiculaire en O, dans la fig. 9. L'hyperbole $SMPC$ décrite du centre O, & du demi-axe tranſverſal $OS = a$, qui continué en ſoit l'axe interieur, ſera celle qu'exige ici l'équation génerale $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$ de l'art. 1. c'eſt à dire, $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$ pour les fig. 7. 8. & $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}}$ pour la fig. 9.

IV. L'art. 2. d'où cela ſe tire, fait voir auſſi en général & en particulier le raport entr'elles de l'ordonnée AM $\left(\frac{ab}{\sqrt{\mp aa \mp bb}}\right)$ de la précedente hyperbole $SMPC$, de AF ou de AH (b) expreſſion de la premiere des viteſſes (u), & de AB priſe $= a$ ſur la même perpendiculaire qu'elles en A à la droite OC: ſavoir

1°. Qu'en général AB (a). $AM\left(\frac{ab}{\sqrt{\mp aa \mp bb}}\right)$ $:: \sqrt{\mp aa \mp bb}. b.$ c'eſt à dire en particulier pour

le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. $AB . AM :: \sqrt{aa-bb} . b$. Et pour le cas de $a < b$ de la fig. 9. $AB . BM :: \sqrt{bb-aa} . b$. D'où l'on voit que AB ſera égale, moindre, ou plus grande que AM dans les fig. 7. 8. ſelon que $\sqrt{aa-bb}$ y ſera égale, moindre, ou plus grande que b, ainſi que le permet l'hypothêſe qu'on y fait de $a > b$; mais que dans la fig. 9. AB ſera toûjours moindre que AM, à cauſe que $b > a$ y rend toûjours $\sqrt{bb-aa} < b$.

2°. Qu'en géneral auſſi $AH\ (b) . AM\ \left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}\right) :: \sqrt{\pm aa \mp bb} . a$. C'eſt à dire encore en particulier pour le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. $AH . AM :: \sqrt{aa-bb} . a$. Et pour le cas de $b > a$ de la fig. 9. $AH . AM :: \sqrt{bb-aa} . a$. D'où l'on voit au contraire que AH ſera toûjours moindre que AM dans les fig. 7. 8. dont le cas de $a > b$ rend toûjours $\sqrt{aa-bb} < a$; & que dans la fig. 9. AH ſera égale, moindre, ou plus grande que AM, ſelon que $\sqrt{bb-aa}$ y ſera égale, moindre, ou plus grande que a, ainſi que le permet auſſi l'hypothêſe qu'on y fait de $b > a$.

V. Tout cela étant ainſi reconnu, ſoient du centre O les droites OP, Op, infiniment près l'une de l'autre, leſquelles rencontrent l'hyperbole $SMPC$ en P, p, & de ce dernier point p encore une ordonnée pq parallele à PQ. L'on aura en géneral (*art.* 1.) le triangle rectangle $OQP = \frac{s\sqrt{ss \mp aa}}{2}$, dont la differentielle ſe-

ra

ra $PpqQ \mp POp = \frac{ds\sqrt{ss \mp aa}}{2} + \frac{ssds}{2\sqrt{ss \mp aa}} =$
$= \frac{ssds \mp aads + ssds}{2\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{2ssds \mp aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$. Mais on a auſſi (*art.* 1.) $PpqQ = ds\sqrt{ss \mp aa} = \frac{2ssds \mp 2aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\mp POp = \frac{2ss \mp aa - 2ss \mp 2aa}{2\sqrt{ss \mp aa}} \times ds =$
$\frac{\mp aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$, ou $POp = \frac{aads}{2\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$.
Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$, d'où réſulte $\frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\frac{adt}{2} = POp$, ou $dt = \frac{2}{a} \times POp$; & (en intégrant) t $(AT) = \frac{2}{a} \times POS + q$. Mais le cas de AT $(t) = 0$, qui rend $POS = MOS$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{2}{a} \times MOS + q$, d'où réſulte $q = -\frac{2}{a} \times MOS$. Donc cette intégrale complette ſera ici $AT = \frac{2}{a} \times POS - \frac{2}{a} \times MOS = \frac{2}{a}$ $\times MOP$ (à cauſe de $OS = a = AB$) $= \frac{2 \times MOP}{OS}$ $= \frac{2 \times MOP}{AB}$ pour tous les cas poſſibles : de ſorte que les tems $AT(t)$ écoulez depuis le commencement du mouvement, ſeront par tout ici en raiſon des trilignes ou ſecteurs hyperboliques MOP correſpondans dans tous les cas poſſibles.

VI. Aiant auſſi en géneral (*art.* 1.) $\frac{a}{s}\sqrt{ss \mp aa} = u = TU$, & $QP = \sqrt{ss \mp aa}$, dont $a = AB$, & $s = OQ$; l'on aura pareillement en géneral $TU = \frac{AB \times QP}{OQ}$, ou $AB = \frac{OQ \times TU}{QP}$. Mais après avoir fait du point H la droite $H\lambda$ parallele à AO, & qui rencontre OM en λ, ſi l'on tire par ce point λ une autre droite NG parallele à AB, & qui rencontre OA, OP, en N, G; l'art. 2. qui donne ici en géneral AH ou $N\lambda . AB :: AM . AO :: N\lambda . NO$. donnera auſſi $NO = AB$ (*art.* 1.) $= OS$: de ſorte que N ſe trouvera au ſommet S de l'hyperbole $SMPC$ dans les fig. 7. 8. Donc on y aura pareillement & dans la fig. 9. $NO = \frac{OQ \times TU}{PQ}$, ou $NO . TU :: OQ . PQ :: NO . NG$. Par conſéquent $NG = TU$ (u) dans tous les cas poſſibles: De ſorte que les viteſſes reſtantes TU (u) à la fin des tems AT ou (*art.* 5.) MOP, ſeront par tout ici entr'elles comme les NG correſpondantes.

VII. Donc (*art.* 5. 6.) ſi l'on prend par tout ici AT (t) $= \frac{2 \times MOP}{OS}$, TU (u) $= NG$ correſpondante, & qu'on acheve le parallelogramme rectangle GT fait de ces deux lignes AT, NG; l'angle U de ce parallelogramme ſera un des points de la Courbe cherchée HUC des viteſſes ici reſtantes (u) malgré les réſiſtances ſuppoſées; & ainſi à l'infini des autres points de cette Courbe. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Co-

COROLLAIRE XVI.

Puiſque les art. 1. 6. de cette Solut. 2. donnent ici en général $0N=AB=0S$, ſi l'on prolonge CB juſqu'à la rencontre de NG en Z, l'on y aura auſſi par tout $NZ=0N=0S$ demi-axe tranſverſe de l'hyperbole équilatere $SMPC$; & par conſéquent ſi l'on tire la droite $0Z$ prolongée vers C, cette droite $0ZC$ ſera ici une des aſymptotes de cette hyperbole dans tous les cas. Donc $0P$, qui (*Solut. 2. art. 2.*) doit partout ici commencer en $0M$, ne pouvant jamais couper NZ que depuis λ juſqu'en Z, les ordonnées TU (*Solut. 2. art. 6.*) $=NG$ ne peuvent jamais être moindres que AH dans les fig. 7. 8. ni être plus grandes que AH dans la fig. 9. Mais ſeulement commencer par lui être égales, ſavoir lorſque $0P$ en $0M$, rendant $0Q=0A$, rend le triligne hyperbolique $M0P=0$, & (*Solut. 2. art. 5.*) $AT=0$; puiſqu'alors NG $(TU)=N\lambda=AH$, & que depuis ce premier inſtant du mouvement, les NG (TU) croiſſent toûjours dans les fig. 7. 8. & diminuent toûjours dans la fig. 9. juſqu'à ce qu'enfin elles ſoient devenuës $=NZ=AB$ par la poſition de $0P$ en $0ZC$; laquelle rendant le triligne hyperbolique $M0P$ infini, & conſéquemment auſſi (*Solut. 2. art. 5.*) AT infinie de même que $0Q$, fait voir que les TU commencées en AH, ne peuvent être égales à AB qu'après un tems infini AT, ni être jamais plus grandes que AB dans les fig. 7. 8. ni plus petites que AB dans les fig. 7. 8. ni plus petites que AB dans la fig. 9.

De tout cela ſuivent encore les Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. 11. *déja tirez de la Solut.* 1.

COROLLAIRE XVII.

Le cas des $TU\,(u) = AB\,(a)$ qui ſuivant le précedent Corol. 16. arriveroit toûjours après un tems infini dans le milieu ſuppoſé, changeant l'égalité $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$ trouvée dans la Solut. 1. art. 1. pour celle de la Courbe *HUC*, en $dt = \frac{aadu}{au - aa} = \frac{aadu}{0}$, fait voir que les accroiſſemens ou décroiſſemens (du) des viteſſes effectives (u), y ſeroient par tout nuls ; ce qui ſe voit auſſi en ce qu'en ce cas de $u = a$, l'équation $v - r = u$ trouvée dans l'art. 1. du Lem. 1. pag. 247. donneroit $v - r = a$, & conſéquemment $dv - dr = 0$, ou $dv = dr$, c'eſt à dire (*remarq.* 1. *pag.* 267.) la peſanteur du mobile égale à la réſiſtance que lui feroit alors le milieu ſuppoſé, en regardant cette peſanteur conſtante comme cauſe des accroiſſemens inſtantanez (dv) de la viteſſe primitive (v). Donc l'équilibre qui réſulteroit ainſi en ce cas de $u = a$ entre la peſanteur du mobile & la réſiſtance (dr) du milieu ſuppoſé, empêchant cette peſanteur d'augmenter cette viteſſe effective (a), & la réſiſtance de la diminuer ; cette même viteſſe AB (a) doit être la plus grande que la peſanteur de ce corps pût jamais lui donner dans le milieu ſuppoſé, c'eſt à dire ſuivant le langage de M. *Huygens*, qu'elle doit être la terminale de ce corps, ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 7. 15.

CO-

COROLLAIRE XVIII.

Puiſque TV (v exprime ici (*hyp.*) la viteſſe primitive à la fin du tems AT (t), c'eſt à dire ce que le mobile en auroit eu à la fin de ce tems en tombant (ſi l'on veut) en vertu de ſa peſanteur conſtante & d'une puiſſance qui d'abord l'eût jetté verticalement de haut en bas d'une viteſſe $= AF$ (b) dans un milieu ſans réſiſtance ni action ; & que (*Solut.* 1. & 2.) TU (u) exprime de même ce que la réſiſtance ſuppoſée du milieu où il ſe meut effectivement, lui laiſſe de cette viteſſe primitive à la fin de ce même tems AT : cette viteſſe TU reſtante de la primitive TV à la fin de ce tems dans ce milieu réſiſtant, ſera à cette primitive :: $TU.TV :: TU.TX + XV :: TU.AF + XV$ (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 248.) :: $TU.AH + XV$ (à cauſe de l'angle XFV ſuppoſé de 45. deg.) :: $TU.AH + FX :: TU.AH + AT$ (*Solut.* 2. *art.* 6.) :: $NG.N\lambda + AT$. Mais (*Solut.* 2. *art.* 5.) $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$ (*Solut.* 2. *art.* 6.) $= \frac{2 \times MOP}{ON}$. Donc chaque viteſſe reſtante TU ſera par tout ici à la correſpondante primitive $TV :: NG.N\lambda + \frac{2 \times MOP}{ON} :: \frac{ON \times NG}{2} . \frac{ON \times N\lambda}{2} + MOP :: ONG.ON\lambda + MOP$. C'eſt à dire, comme le triangle rectangle ONG eſt à la ſomme correſpondante faite du triangle rectangle $ON\lambda$ & du ſecteur hyperbolique MOP.

* On voit de-là que le cas de la viteſſe initiale AF (b) $= 0$ dans la fig. 7. y rendant pareillement (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 248.) AH ou

* FIG. VII.

(*Solut. 2. art. 6.*) $N\lambda = 0$, $AM = 0$, $MS = 0$, $AS = 0$, $AO = OS$ (*Solut. 2. art. 1.*) $= AB$ (*Solut. 2. art. 6.*) $= ON$, $AN = 0$, $NG = AG$, $MOP = AOP$; chaque viteſſe reſtante TU (u) doit être en ce cas à la primitive correſpondante TV (v) :: $OAG . AOP$. C'eſt à dire, comme le triangle rectangle OAG eſt au ſecteur hyperbolique AOP correſpondant, ainſi qu'on l'a déja vû pour ce même cas dans le Corol. 15. pag. 275. 276.

COROLLAIRE XIX.

* Il ſuit encore de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la ſeule peſanteur conſtante d'un corps pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance ni action une viteſſe verticale VX qui fut égale à la terminale AB qu'il auroit (*Corol.* 7. 15. 17.) dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrez des viteſſes de ce corps, ſeroit à ce qu'il en faudroit à ce même corps jetté d'abord verticalement de haut en bas d'une viteſſe AF (b) dans ce milieu réſiſtant, pour y avoir en vertu de ſa peſanteur & de cette projection la viteſſe TU (u) ou (*Solut. 2. art. 6.*) NG malgré la réſiſtance de ce milieu :: $AB . \frac{2 \times MOP}{AB}$. puiſque le premier de ces tems ſeroit $FX = VX$ (*hyp.*) $= AB$, & que le ſecond ſeroit AT (*Solut. 2. art. 5.*) $= \frac{2 \times MOP}{AB}$. Donc le premier de ce tems ſeroit auſſi au ſecond :: $\frac{AB \times AB}{2} . MOP$ (la Solut. 2. art. 6. donnant

NO

* FIG. VII. VIII. IX.

$NO = AB$, & la conſtr. $AB = NZ$) :: $\frac{NO \times NZ}{2}$. MOP :: ONZ. MOP. c'eſt à dire, comme le triangle rectangle ONZ ſeroit au ſecteur hyperbolique correſpondant MOP.

† On voit auſſi de-là, que le cas de la viteſſe initiale AF (b) $= 0$, de la fig. 7. dans ce milieu réſiſtant, y rendant (comme ſur la fin du Corol. 18.) $ON = AB$, NZ en AB, & ON en OA, & y changeant ainſi le triangle ONZ en OAB, & le ſecteur MOP en AOP; le premier des deux tems en queſtion ſeroit en ce cas de la fig. 7. au ſecond :: OAB. AOP. c'eſt à dire, comme le triangle rectangle OAB eſt au ſecteur hyperbolique correſpondant AOP, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 16. de la page 276.

COROLLAIRE XX.

* Il ſuit auſſi de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la ſeule peſanteur conſtante d'un corps pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance ni action, une viteſſe verticale VX qui fût égale à l'initiale AF imprimée d'abord verticalement de haut en bas dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrez des viteſſes de ce corps, ſeroit à ce qu'il en faudroit à ce corps ainſi jetté dans ce milieu réſiſtant pour y avoir en vertu de ſa peſanteur & de cette projection la viteſſe TU (u) ou (*Solut. 2. art. 6*) NG malgré la réſiſtance de ce milieu :: AF. $\frac{2 \times MOP}{AB}$, puiſ-

† FIG. VII. * FIG. VII. VIII. IX.

puiſque le premier de ce tems ſeroit $FX = VX$ (*hyp.*) $= AF$, & que le ſecond ſeroit AT (*Solut. 2. art. 5.*) $= \frac{2 \times MOP}{AB}$. Donc le premier de ces tems ſeroit auſſi au ſecond :: $\frac{AF \times AB}{2}$. MOP (la Solut. 2. art. 6. donnant $AB = NO$, & l'art. 4. du Lem. 1. pag. 248. donnant auſſi $AF = AH$ (*Conſtr.*) $= N\lambda$) :: $\frac{N\lambda \times NO}{2}$. MOP :: $ONλ$. MOP. C'eſt à dire, comme le triangle rectangle $ONλ$ ſeroit au ſecteur hyperbolique MOP.

* D'où l'on voit que le cas de la viteſſe initiale $AF = o$ de la fig. 7. dans le milieu réſiſtant, y rendant auſſi $N\lambda = o$, puiſque (*Lem. 1. art. 4. pag. 248.*) $AF = AH$ (*Conſtr.*) $= N\lambda$; le triangle $ONλ$, & conſéquemment auſſi le premier des tems en queſtion y ſeroit nul ou zero : auſſi ne faut-il aucun tems pour n'aquerir aucune viteſſe.

COROLLAIRE XXI.

† I. Puiſque (*Solut. 2. art. 1.*) $\pm \frac{a^4}{s^5} = aa - uu$, ou $uu = aa \mp \frac{a^4}{s^5}$, & conſéquemment $udu = \mp \frac{a^4 ds}{s^4} = \mp \frac{a^4 ds}{s^3}$; l'on aura $\frac{udu}{aa - uu} = \frac{ds}{s}$, ou $\frac{aaudu}{aa - uu} = \frac{aads}{s}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1. donne $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$, ou $udt = \frac{aaudu}{aa - uu}$. Donc

udt

* FIG. VII. † VII. VIII. IX.

$udt = \frac{aads}{s}$, & (en intégrant) $\int udt\,(ATUH) = aa \times ls + q$. Mais le cas de P en M, qui rend $OQ(s) = OA$ (*Solut. 2. art. 2.*) $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$, $MOP = 0$, & conséquemment aussi (l'art. 5. de la Solut. 2. donnant $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$) $AT = 0$, & $ATUH = 0$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}} + q$, d'où résulte $q = -aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$. Donc cette intégrale complette sera en general $ATUH = aa \times ls - aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}} = aa \times l \frac{s\sqrt{\pm aa \mp bb}}{aa}$ (à cause de $OQ = s$, & de $OA = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$) $= aa \times l \frac{OQ}{OA}$. Mais (*Lem. 2. pag.* 248.) les espaces parcourus pendant des tems quelconques (AT ou $\frac{2 \times MOP}{AB}$) sont entr'eux comme les sommes $\int udt\,(ATUH)$ des viteſſes $u\,(TU)$ emploiées à les parcourir. Donc les espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{2 \times MOP}{AB}$, sont entr'eux dans tous les cas comme les grandeurs $aa \times l \frac{OQ}{OA}$ correspondantes, ou (à cause de aa constante) comme les Logarithmes des fractions $\frac{OQ}{OA}$ correspondantes.

II. Si l'on considere presentement que l'art. 2. de

de la Solut. 2. donne en general $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, la ſubſtitution de cette valeur de s dans l'expreſſion générale (*art.* 1.) $aa \times l^{\sqrt{\pm aa \mp bb}} : aa$ des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$ correſpondans, donnera auſſi en general ces eſpaces en raiſon des grandeurs $aa \times l^{\frac{\sqrt{\pm aa \mp bb}}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}}$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de a conſtante) en raiſon des Logarithmes correſpondans $l^{\frac{\sqrt{\pm aa \mp bb}}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}}$: c'eſt à dire (les ſignes ſuperieurs ſous chaque ſigne radical, étant pour le cas de $a > b$ dans les fig. 7. 8. & les inferieurs pour celui de $b > a$ dans la fig. 9.) en raiſon des Logarithmes correſpondans $l^{\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}}$ dans les fig. 7, 8. & en raiſon des correſpondans $l^{\frac{\sqrt{bb - aa}}{\sqrt{uu - aa}}}$ dans la fig. 9. conformément à l'art. 2. du Corol. 12. dans lequel ces mêmes grandeurs ont auſſi été trouvées pour les expreſſions de ces mêmes eſpaces.

COROLLAIRE XXII.

Si l'on ajoûte préſentement aux fig. 7. 8. 9. une autre hyperbole équilatere $\Phi Z C$ entre les aſymptotes orthogonales OC, $O\Phi$, laquelle rencontre AB, PQ, en β, R, aiant le même

CCDr

centre O que la premiere $SMPC$; mais ſon ſommet en Z, aiant OZ pour ſon demi-axe tranſverſe, l'aſymptote OZC de l'autre pour ſon axe interieur, & $sy = aa$, ou $y = \frac{aa}{s}$ pour ſon équation aſymptotique, dont les coordonnées ſont $s = OQ$, & $y = QR$; l'on aura ici yds $(QqrR) = \frac{aads}{s}$ (*Corol.* 21. *art.* 1.) $= udt$. Donc (en intégrant) $\int udt\ (ATUH) = \int yds + q = \Phi OQR\Phi + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rendant TU en AH, rend NG (*Solut.* 2. *art.* 6.) $= N\lambda$, OP en OM, QP en AM, QR en $A\beta$, & conſéquemment $\Phi OQR\Phi = \Phi OA\beta\Phi$; réduit cette intégrale à $0 = \Phi OA\beta\Phi + q$, d'où réſulte $q = -\Phi OA\beta\Phi$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH\ (\int udt) = \Phi OQR\Phi - \Phi OA\beta\Phi = QA\beta R$. Par conſéquent (*Lem.* 2. *pag.* 248.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems $AT\ (t)$, ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$, en vertu des viteſſes $TU\ (u)$ reſtantes à chaque inſtant des primitives $TV\ (v)$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſeront auſſi entr'eux en raiſon des aires hyperboliques $QA\beta R$ correſpondantes dans tous les cas poſſibles.

COROLLAIRE XXIII.

Donc auſſi après un tems infini AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) MOP les eſpaces parcourus par ce mobile, ſeroient ici infinis dans tous les cas poſſibles; puiſque le ſecteur MOP infini rendant l'abſciſſe OQ infinie, l'aire $QA\beta R$ le ſeroit auſſi; & par conſéquent l'eſpace (*Cor.* 22.) qui

qui devroit être ici parcouru pendant ce tems infini, ſeroit pareillement infini.

Cela ſuit encore de tous les articles des Corol. 12. 13. 14. 21. & ſi clairement encore qu'il n'y a qu'à jetter les yeux deſſus pour le voir.

COROLLAIRE XXIV.

De ce que (*Corol.* 22.) $QqrR = yds = udt = TU \times dt$, l'on aura $\frac{QqrR}{TU} = dt$ (*Solut.* 2. *art.* 5.) $= \frac{2}{a} \times POp = \frac{2 \times POp}{AB}$, & conſéquemment $QqrR . POp :: TU . \frac{1}{2} AB$. C'eſt à dire, (*Corol.* 7. 15. 17.) que les aires hyperboliques élémentaires correſpondantes $QqrR, POp$, ſont entr'elles comme les viteſſes TU (u) correſpondantes, ſont chacune à la moitié de la terminale AB (a).

COROLLAIRE XXV.

* I. Soit encore, comme dans les fig. 1.2.3. du Corol. 14. une hyperbole équilatere quelconque $D\pi I$ ajoûtée aux fig. 7. 8. 9. entre les aſymptotes orthogonales NZ, ZI, dans les fig. 7. 8. après y avoir prolongé CZ vers I; & entre les orthogonales KZ, ZI, dans la fig. 9. après y avoir auſſi prolongé CZ vers I, & de plus NZ vers K: c'eſt à dire en géneral (après avoir pris $Z\Delta = ZN = BA$ dans la fig. 9. & avoir ajoûté Δ en N dans les fig. 7. 8.) une hyperbole équilatere quelconque $D\pi I$ entre les aſymptotes $ZI, Z\Delta$, dans les fig. 7. 8. 9. ſoient priſes par tout dans ces figures, $N\Pi . NG :: NG . NZ$.

Et

* FIG. VII. VIII. IX.

Et $NK.N\lambda :: N\lambda.NZ$. Enſuite après avoir mené des points Δ, Π, K, les ordonnées ΔD, $\Pi\pi$, $K\Upsilon$, comme dans les fig. 1. 2. 3. Soient encore (ſur NZ, comme dans ces figures, ſur AB) $\Delta Z = NZ = AB = a$, $N\lambda = AH = b$, $\Delta D = c$, $\frac{2}{a} \times MOP$ (*Solut. 2. art. 5.*) $= AT = t$, $N\Pi = m$, $\Pi\pi = n$.

II. Il réſulte de tout cela $Z\Pi = a - m$ dans les fig. 7. 8. & $Z\Pi = m - a$ dans la fig. 9. c'eſt à dire, en général $Z\Pi = \pm a \mp m$, dont les ſignes ſuperieurs ſont pour les fig. 7. 8. & les inferieurs pour la fig. 9. comme dans l'art. 1. du Corol. 14. en d'autres Lettres équivalentes des fig. 1. 2. 3. Ce qui donnera $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa - uu} = udt$, & $\int udt$ ($ATUH$) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times \Upsilon K \Pi \pi$, comme dans les autres articles de ce Corol. 14. C'eſt à dire (*Lem. 2. pag.* 248.) que les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{2}{a} \times MOP$ en vertu des viteſſes reſtantes TU (u) ou (*Solut. 2. art. 6.*) NG, ſeront ici entr'eux comme les aires hyperboliques $\Upsilon K \Pi \pi$ correſpondantes.

III. Puiſque (*art. 1.*) NZ (a). NG (u) :: NG (u). $N\Pi$ (m) $= \frac{uu}{a}$. Et que (*art. 2.*) $Z\Pi = \pm a \mp m$, l'on aura $Z\Pi = \pm a \mp \frac{uu}{a}$, ou (en multipliant le tout par ± 1) $\pm Z\Pi = a - \frac{uu}{a}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1. donne $\frac{dt}{aa} =$

$= \frac{du}{aa-uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa-uu} = \frac{adu}{a-\frac{uu}{a}}$. Donc $dt = \pm \frac{adu}{Z\Pi} = \pm \frac{NZ \times Gg}{Z\Pi}$: c'eſt à dire en général (à cauſe de NZ conſtante) les inſtans dt ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) POp en raiſon des fractions $\frac{Gg}{Z\Pi}$ correſpondantes ; & conſéquemment auſſi (à cauſe de $\Pi\pi . \Delta D :: Z\Delta . Z\Pi = \frac{\Delta D \times Z\Delta}{\Pi\pi}$) comme les correſpondantes $\frac{\Pi\pi \times Gg}{\Delta D \times Z\Delta}$, ou ſimplement (à cauſe de $\Delta D \times Z\Delta$ conſtant) comme les produits $\Pi\pi \times Gg$ correſpondans pour tous les cas poſſibles, ainſi qu'on l'a déja vû en d'autres lettres équivalentes dans les Corol. 23. & 25. des pag. 288. 289. 291. 292. pour le cas de la fig. 7. des mouvemens commencez à zero de viteſſe.

IV. Puiſque (*art.* 2.) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aadu}{aa-uu}$, ou $\pm ndm = \frac{2acdu}{aa-uu}$, & que l'art. 5. de la Solut. 2. donne $POp = \frac{a}{2} \times dt$ (*Solut.* 1. *art.* 1.) $= \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu}$; l'on aura ici en général $\pm ndm . POp :: \frac{2acudu}{aa-uu} . \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu} :: c u . \frac{1}{4} aa :: u . \frac{aa}{4c}$. De ſorte que ſi l'on ſuppoſe préſentement que l'axe tranſverſe, juſqu'ici arbitraire, de l'hyperbole $D\pi I$, ſoit $= Z\Delta \times \sqrt{2} = a\sqrt{2}$, & conſéquemment $\Delta D\,(c) = \frac{1}{4} Z\Delta\,(\frac{1}{4}a)$, ou $4c = a$; l'on aura ici $\pm ndm . POp :: u . a :: NG . NZ$. c'eſt-

c'eſt à dire en géneral, que les élemens correſpondans ndm, POp, des aires hyperboliques $\Upsilon K \Pi \pi$, MOP, pareillement correſpondantes, ſeront par tout ici entr'eux comme les viteſſes correſpondantes NG (u), NZ (a). Donc les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes pendant un même inſtant quelconque dt ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{2}{a} \times POp$, étant entr'eux comme ces mêmes viteſſes, ils ſeront pareillement ici entr'eux :: $ndm. POp$. Donc auſſi le premier de ces eſpaces parcouru de la viteſſe NG ou TU (u) pendant l'inſtant dt, étant (*art. 2. & Corol. 14.*) comme l'aire élémentaire ndm correſpondante de l'hyperbolique $\Upsilon K \Pi \pi$, ſi l'on prend cet élement hyperbolique ndm pour cet eſpace inſtantané, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique POp correſpondant pour l'eſpace parcouru de la viteſſe NZ ou AB (a) pendant le même inſtant dt; & par tout de même. Donc (en intégrant) l'eſpace parcouru de la viteſſe variée TU (u) pendant les tems AT (t) ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{2}{a} \times MOP$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'eſpace parcouru de la viteſſe terminale uniforme AB (a) pendant le même tems :: $\Upsilon K \Pi \pi. MOP$. Et par tout ici de même pour tous les cas poſſibles, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 24. & 25. art. 4. des pag. 289. 290. 291. 292. pour le cas de la fig. 7.

COROLLAIRE XXVI.

I. Puiſque (*hyp.*) les réſiſtances inſtantanées $z(dr)$

$z\,(dr) = \frac{uu}{a}$, le cas de $u = a$, c'eſt à dire (*Corol.* 7. 15. 17.) de la viteſſe effective ou reſtante TU (u) devenuë égale à la terminale AB (a) après un tems AT (t) infini, doit auſſi rendre $z\,(dr) = a$. Mais (*Corol.* 9.) le mouvement devant demeurer ici uniforme pour toûjours lorſqu'il en eſt à cette viteſſe terminale, celle de ces réſiſtances inſtantanées qui s'y oppoſe, doit alors être égale à la peſanteur du mobile : autrement leur inégalité ne permetroit pas cette uniformité de mouvement. Donc en prenant $\frac{uu}{a}$ pour ces réſiſtances inſtantanées du milieu ſuppoſé, l'on aura pareillement a pour la peſanteur du mobile ; & conſéquemment auſſi $\pm a \mp \frac{uu}{a}$ pour la difference ou excès de force dont cette peſanteur ſurpaſſera chacune de ces réſiſtances dans les fig. 7. 8. ou ſera ſurpaſſée par chacune d'elles dans la fig. 9. les ſignes ſuperieurs étant pour les fig. 7. 8. & les inferieurs pour la fig. 9. Mais (*Corol.* 25. *art.* 1. & 3.) $NZ = a$, $N\Pi = \frac{uu}{a}$, & $Z\Pi = \pm a \mp \frac{uu}{a}$. Donc en géneral la peſanteur conſtante du mobile, chaque réſiſtance inſtantanée qu'il trouve dans le milieu où on le ſuppoſe tomber, & la difference dont la plus forte des deux ſurpaſſe l'autre, ſont ici entr'elles comme les grandeurs NZ, $N\Pi$, $Z\Pi$, correſpondantes, deſquelles la troiſiéme $Z\Pi$ exprime l'excès de la peſanteur pardeſſus la réſiſtance dans les fig. 7. 8. & l'excès de la réſiſtance par deſſus la peſanteur dans la fig. 9.

II.

II. Mais si l'on imagine chacune des aires hyperboliques $\Upsilon K \Pi \pi$ divisée en parties égales quelconques par des paralleles à ZI: c'est à dire (*Corol.* 14. *art.* 2. 3. 4. 5. & *Corol.* 25. *art.* 2.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT, divisez chacun en parties égales quelconques; il est manifeste que les $Z\Pi$ correspondantes seront en progression géometrique. Donc (*art.* 1.) les excès ($Z\Pi$) de la pesanteur (NZ) du mobile par dessus chacune des résistances instantanées ($N\Pi$) du milieu dans les fig. 7. 8. ou de chacune de ces résistances pardessus cette pesanteur dans la fig. 9. seront en progression géometrique à la fin des parties égales correspondantes des espaces ici parcourus en vertu des vitesses TU pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2}{a} \times MOP$ dans tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déja vû en d'autre lettres équivalentes dans le Corol. 19. art. 3. pag. 283. pour le cas de la fig. 7.

III. On voit delà que si l'on prenoit ces excès $Z\Pi$ dont la pesanteur du mobile surpasse chaque résistance instantanée dans les fig. 7. 8. ou est surpassée par chacune d'elles dans la fig. 9. pour des nombres dont le plus grand ZK fût pris pour l'unité; les espaces ici parcourus pendant les tems AT correspondans, en seroient les Logarithmes.

IV. Donc si dans les fig. 10. 11. 12. on suppose KL, ΠX, paralleles à ZC, & dont la premiere KL rencontre AB (prolongée dans la fig. 12.) en L; que par ce point L passe une Logarithmique LXC d'une soutangente $= ZK = BL = 1$, aiant ZC pour asymptote, & qui ren-

rencontre ΠX en X, par lequel point X ſoit DS parallele à BA, & qui rencontre perpendiculairement en S, D, les paralleles AC, BC: cela ſuppoſé, & tout le reſte demeurant le même que dans les fig. 7. 8. 9. l'on aura ici (*art.* 3.) AS ou BD en raiſon des eſpaces parcourus pendant les tems AT en vertu des viteſſes NG ou TU reſtantes à chaque inſtant malgré les réſiſtances $N\Pi$ ou SX du milieu ſuppoſé, en prenant (ainſi que dans l'art. 3.) les excès $Z\Pi$ de la peſanteur (NZ) du mobile ſur chacune des réſiſtances inſtantanées ($N\Pi$), ou de chacune d'elles ſur cette peſanteur, pour des nombres dont le plus grand ZK ou BL ſeroit l'unité; puiſque les abſciſſes AS ou BD en ſeroient les Logarithmes. Et reciproquement ſi l'on prenoit ici ces abſciſſes AS ou BD pour les eſpaces parcourus pendant les tems AT correſpondans, les ordonnées DX ou $Z\Pi$ ſeroient en raiſon des excès de la peſanteur DS ou ZN du mobile ſur chacune des réſiſtances inſtantanées SX ou $N\Pi$ correſpondantes du milieu ſuppoſé, ou de chacune de ces réſiſtances ſur cette peſanteur.

V. Cela étant, & la Logarithmique LXC d'une Soûtangente $= ZK = 1$, aiant ſon ordonnée $BL = ZK$, étant ainſi ajoutée à la Courbe HUC des viteſſes reſtantes (*u*) & ſur la même aſymptote BC qu'elle; ſi l'on méne une ordonnée quelconque TU (*u*) de cette Courbe HUC; qu'on faſſe UG parallele à TN, & qui rencontre NZ en G; qu'on prenne $N\Pi$ troiſiéme proportionnelle à NZ, NG, comme l'on a pris (*Corol.* 25.) NK troiſiéme proportionelle à NZ, $N\lambda$, ou AL troiſiéme proportionelle à AB (*a*), AH (*b*); qu'on faſſe ΠX parallele à NC, & qui rencontre la Logarithmique LXC en

en X; & qu'on mene par ce point X la droite DS parallele à BA, & qui rencontre perpendiculairement en S, D, les paralleles AC, BC: il eſt viſible

1°. Qu'en prenant, par exemple, les AT pour les tems écoulez depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois TU ou NG (*Solut.* 1. *art.* 1. & *Solut.* 2. *art.* 6.) pour les viteſſes reſtantes à la fin de ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées; BD ou AS (*art.* 4.) pour les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes TU (u) pendant ces mêmes tems AT (t); $N\Pi$ ou SX (*art.* 1.) pour les réſiſtances qui s'y oppoſent à la fin de ces eſpaces ou de ces tems; NZ ou AB ou SD (*art.* 1.) pour la peſanteur conſtante du mobile; $Z\Pi$ ou DX (*art.* 1. 2. 3 4.) pour les excès de force dont cette peſanteur ſurpaſſe les réſiſtances inſtantanées SX, ou eſt ſurpaſſée par elles à la fin des tems AT.

2°. Il eſt pareillement viſible que ſi au lieu de prendre AT pour les tems écoulez, l'on eût pris à volonté quelqu'une des autres grandeurs TU, BD, SX, DX, AB, &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. l'on auroit trouvé de même les tems écoulez depuis le commencement du mouvement, en raiſon des AT correſpondantes, & tout le reſte comme dans ce nomb. 1. Les citations qui y ſont emploiées, rendent tout cela manifeſte.

Les deux Solutions précédentes pourroient encore fournir pluſieurs autres Corollaires que je ſuprime pour n'être pas trop long.

REMARQUE.

Si l'on compare les Coroll. 2. 3. 4. 6. 7. 8. 9.

16. 17. 23. de ce Problême-ci avec les Coroll. 2. 4. 5. 6. 10. du Prob. 2. pag. 164. &c. des Mem. de 1708. On verra en géneral pour tous les cas des projections verticales de haut en bas dans des milieux réſiſtans, que les hypothêſes de leurs réſiſtances *en raiſon des viteſſes des corps jettez*, & *en raiſon des quarrez de ces viteſſes*, ont ceci de conforme,

1°. Qu'elles rendent également après un tems infini les viteſſes, qui malgré ces réſiſtances réſulteroient de la force de projection & de la peſanteur conſtante du corps jetté, égales dans chaque milieu à la terminale de ce corps, c'eſt à dire, à la plus grande qu'il pût y aquerir après un tems infini en vertu de ſa ſeule peſanteur.

2°. Que juſque-là ces viteſſes reſtantes de celle de projection & des primitivement accelerées par la peſanteur conſtante du mobile, en raiſon des tems écoulez, s'accelereroient ou ſe retarderoient de part & d'autre, c'eſt à dire dans chacune des hypothêſes précédentes, ſelon que les viteſſes de projection ſeroient moindres ou plus grandes que les terminales du corps jetté permiſes par les milieux où elles ſe feroient.

3°. Qu'au contraire ces viteſſes reſtantes, après être devenuës égales aux terminales correſpondantes, reſteroient toûjours uniformes de part & d'autre, ſi le mouvement continuoit dans chaque milieu: de ſorte que ſi la viteſſe de projection étoit égale de part & d'autre à la terminale qui y conviendroit au corps jetté, ſa viteſſe actuelle s'y trouveroit uniforme pour toûjours dès le premier inſtant de la projection nonobſtant l'action continuelle de ſa peſanteur à laquelle la réſiſtance de chacun des milieux ſuppoſez ſe trouveroit alors égale dans toute la du-

rée

rée de l'un & de l'autre de ſes mouvemens.

4°. Que les eſpaces parcourus pendant des tems infinis, ſeroient pareillement infinis de part & d'autre.

5°. Que les Courbes des viteſſes reſtantes malgré les réſiſtances de chacune des deux hypothêſes précédentes, doivent avoir une aſymptote parallele à leur axe, & diſtante de lui d'une quantité qui de part & d'autre exprime la viteſſe terminale du corps jetté.

6°. Que chacune de ces Courbes, & celle des réſiſtances totales, qui lui répond ſur le même axe, ont leurs convexitez ou leurs concavitez tournées en même ſens ou du même côté.

C'eſt là ce que la comparaiſon fortuite des Corollaires citez au commencement de cette Remarque, m'y a fait appercevoir de conformité nonobſtant la difference des hypothêſes qu'on y fait touchant les réſiſtances des milieux : peut-être que la comparaiſon, faite entr'eux, des autres Corollaires de ce Problême-ci & du Prob. 2. pag. 164. &c. des Mem. de 1708. y feroit auſſi appercevoir d'autres conformitez ; mais cela eſt trop aiſé à faire pour s'y arrêter davantage : il ſuffit d'y avoir fait penſer.

Il eſt aiſé de voir auſſi qu'en faiſant b = 0 *dans tout ce qui précéde, le Problême de la page* 249. *ſe trouvera n'être qu'un Corollaire de celui-ci, dont les deux Solutions générales avec leurs Corollaires deviendront alors propres & particulieres à celui-là : De ſorte qu'on auroit pû l'omettre en concluant ainſi de ce qui précéde, tout ce qu'on en a démontré depuis la pag.* 249 *juſqu'à la pag.* 292. *Mais le Memoire où il ſe trouve, & celui-ci, ainſi réduits à un, l'auroient rendu trop long, outre qu'il y a des Eſprits à qui l'intelligen-*

ce du particulier ſert pour entendre le géneral; ce qui eſt fort commun, & cependant d'autant plus ſurprenant que le géneral eſt toûjours plus ſimple que le particulier.

Voilà pour les mouvemens primitivement accélerez en raiſon des tems écoulez, c'eſt à dire, dont les viteſſes dans le vuide auroient eu des accroiſſemens égaux en tems égaux : leſquels mouvemens ſeroient faits dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrez des viteſſes effectives que ces milieux permettroient au mobile, ſoit qu'il eût commencé par quelqu'une, ou non. On verra de même dans un autre Memoire ce qui concerne les mouvemens primitivement retardez en raiſon des tems à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans le vuide : leſquels mouvemens ſeroient auſſi faits dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrez des viteſſes effectives des corps mûs permiſes par ces milieux.

OBSERVATIONS SUR LES ECREVISSES DE RIVIERE.

PAR M. GEOFFROY le jeune.

* PARMI le grand nombre d'Obſervations qu'on a faites ſur certaines parties de l'Hiſtoire naturelle, il y en a qui demeurent obſcures & comme ignorées, faute d'être confirmées par de nouvelles experiences. Cependant

* 23. Août 1709.

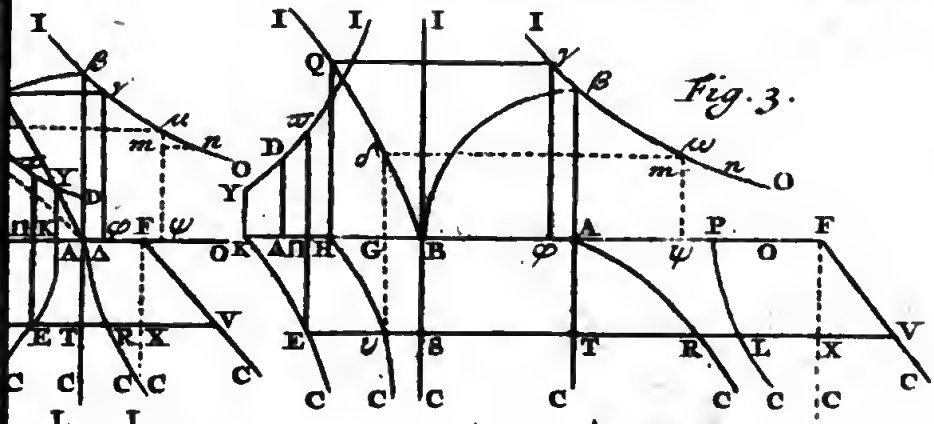


Fig. 3.

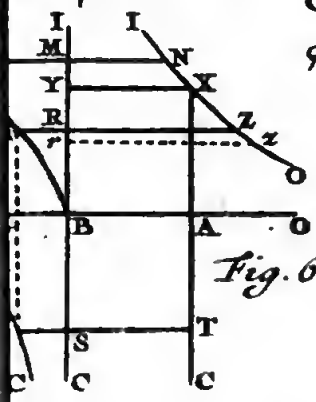


Fig. 6.

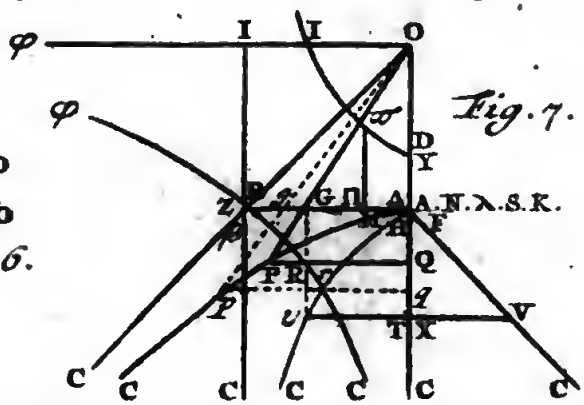


Fig. 7.

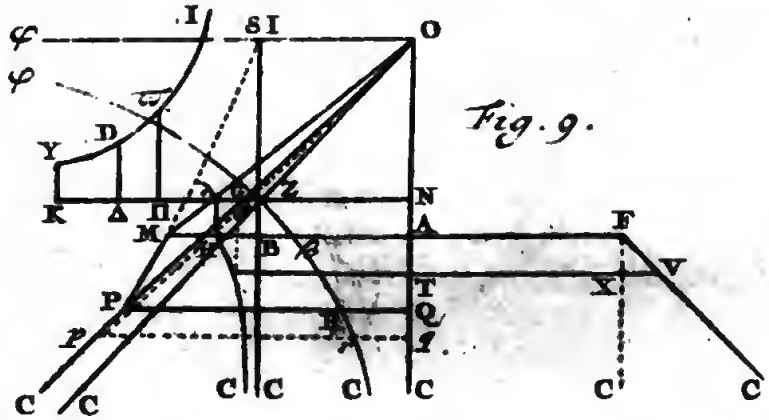


Fig. 9.

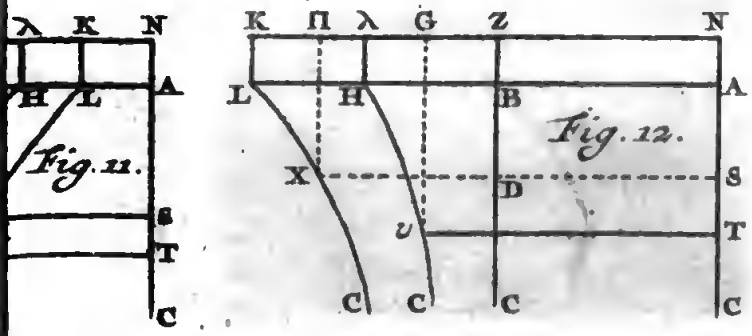


Fig. 11.

Fig. 12.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

dant pour rendre la Phyſique floriſſante, ce n'eſt pas aſſez de faire de nouvelles découvertes, il eſt encore important d'empêcher que les anciennes ne ſe perdent. C'eſt pourquoi il faut quelquefois remanier de nouveau certaines matieres, qui au bout d'un tems paroiſſent negligées, & dont on ne peut rien dire que ſur la foi de quelqu'Auteur à qui il n'eſt pas toûjours ſûr de ſe fier.

En prenant cette voie on a le plaiſir, ou de confirmer l'opinion vulgaire, ou de la refuter, ou du moins de l'éclaircir. Car quand il n'y a que peu de perſonnes qui aient traité une matiere, il n'arrive gueres qu'ils l'aient épuiſée. C'eſt ce qui m'a porté de nouveau à faire quelques obſervations ſur les Ecreviſſes de Riviere, & particulierement ſur les pierres qu'on y découvre dans le tems qu'elles changent de dépouilles, & qui à cauſe de leur figure, ſont nommées Yeux d'Ecreviſſes.

L'opinion la plus commune touchant ces ſortes de pierres, eſt qu'elles ſe trouvent dans le cerveau des Ecreviſſes de Riviere. C'eſt celle de *Geſner*, d'*Agricola*, & de *Belon*. Cependant il s'en faut bien qu'elles ſoient dans le cerveau de ces animaux, puiſqu'on les trouve plûtôt autour de leur eſtomach.

Vanhelmont paroît être le premier qui s'en ſoit apperçû; mais comme il s'eſt rendu ſuſpect en bien des rencontres, ſon ſentiment n'a pû prévaloir ſur celui qui étoit déja reçû. Il n'a donc été ſuivi que de peu de perſonnes qui ont vû que l'experience étoit pour lui.

Cet Auteur avoit obſervé, que vers la mi-Juin les Ecreviſſes commencent à devenir malades, parce que c'eſt-là environ le tems qu'el-

les doivent changer de dépouilles. Elles demeurent pendant neuf jours & davantage languiſſantes & comme mortes ; & il prétend que dans cet eſpace de tems il ſe forme une nouvelle membrane qui envelope leur eſtomach, & qu'entre les deux il s'épanche une liqueur laiteuſe, qui deſcendant aux deux côtez ſe durcit en pierre. Cette nouvelle membrane lui ſemble naître de la pellicule qui ſe forme ſur cette liqueur laiteuſe, comme il a coûtume de s'en former une ſur du lait chaud. Elle devient le nouvel eſtomach, & le vieux qui eſt au dedans, avec le reſte de cette liqueur & les pierres même, ſe réſout peu à peu, & ſert de nourriture à l'animal pendant vingt-ſept jours que durent ces pierres ; car alors il ne mange point, & on ne lui trouve aucune autre choſe dans l'eſtomach.

Il ne m'a pas été poſſible de ſuivre de point en point tout ce que rapporte *Vanhelmont* ; mais j'ai fait quelques obſervations qui s'accordent avec les ſiennes.

J'ai trouvé des Ecreviſſes fort molles, & ſi prêtes à quitter leurs écailles, qu'elle étoit déja levée ; en ſorte qu'elle laiſſoit voir la nouvelle comme une membrane aſſez épaiſſe à qui il ne manquoit que le tems pour la rendre auſſi dure que celle qui ſe détachoit.

J'ai remarqué que l'écaille qui ſe levoit étoit fort mince, & que la membrane interieure qui a coûtume de la tapiſſer n'y étoit plus attachée, & formoit la nouvelle écaille.

J'ai obſervé la même choſe dans la queuë que l'on nomme communément le Col de l'Ecreviſſe, dont les tables ſe levoient fort aiſément, & laiſſoient paroître la membrane qui devoit leur ſucceder.

En

En caſſant les pinces j'ai trouvé la même choſe ; ainſi on peut dire, que dans le tems que l'Ecreviſſe ſe dépouille de ſon écaille, la membrane interne s'en détache parfaitement, elle devient plus épaiſſe, & enfin forme l'écaille.

J'ai enſuite obſervé, que celles qui commençoient à quitter leurs écailles & où la membrane interieure étoit aſſez épaiſſe, avoient des pierres qui étoient tout-à-fait formées aiant la figure d'une tête de champignon naiſſant.

Pour remonter à la naiſſance de ces pierres, j'ai ouvert des Ecreviſſes en d'autres tems de l'année ſans y rien trouver. Mais dans les dernieres Obſervations que j'ai faites ce mois-ci : J'ai ouvert des Ecreviſſes vigoureuſes & qui ne faiſoient que commencer leur muë ; j'ai trouvé à la place de chaque pierre une lame ou plaque blanche qui nageoit au milieu d'une glaire, & qui étoit apparemment l'embryon de la pierre. Cette pierre & le ſuc glaireux étoient envelopez dans un petit ſac membraneux & fort delié.

J'en ai trouvé d'autres où les pierres étoient toutes formées, & dont l'eſtomach étoit ſolide & plein d'une liqueur brune, mouſſeuſe & fetide.

Au deſſous du ſac qui renferme les pierres, j'ai trouvé une veſicule membraneuſe aplatie & dont je ne connois point l'uſage. J'ai obſervé ſeulement, que lorſqu'il ne paroît plus de pierre, cette veſicule ſe remplit d'une eau claire & douce, & occupe le même eſpace qu'occupoit la pierre.

Dans d'autres j'ai trouvé les pierres groſſes, belles, & une nouvelle membrane très délicate qui envelope les pierres & l'eſtomac. Aiant le-

vé cette membrane, on y diſtinguoit très-parfaitement trois nouvelles dents toutes ſemblables à celles du vieil eſtomach, de maniere que l'on ne peut point douter que cette membrane ne devienne par la ſuite le veritable eſtomach.

Dans des Ecreviſſes qui avoient mué, j'ai trouvé l'eſtomach plein d'une liqueur brune. La membrane de l'eſtomach étoit tendre, il ne paroiſſoit point de matiere viſqueuſe ni aucun veſtige d'ancien eſtomach. Les pierres étoient fort diminuées, & paroiſſoient comme rongées par quelque diſſolvant. Elles étoient envelopées d'une membrane fort fine qui étoit la ſeule cloiſon qui les ſéparât de la cavité de l'eſtomach.

Dans d'autres Ecreviſſes qui avoient mué depuis plus long-tems, je n'ai point aperçu leurs pierres à leur place accoûtumée; mais je les ai trouvées tout-à-fait dans l'eſtomach, & jointes enſemble par leurs parties concaves.

Dans d'autres dont la nouvelle écaille étoit déja preſque tout-à-fait dure, je n'ai aperçû à l'endroit où les pierres ont coûtume d'être renfermées, qu'une tache blanche qui n'étoit autre choſe que les deux membranes de la Veſicule qui renfermoit la pierre & qui s'étoient affaiſſées l'une ſur l'autre. Aiant ouvert l'eſtomach je l'ai trouvé plein d'une liqueur jaune & d'alimens ſans aucun veſtige de pierre. J'y ai même trouvé des morceaux d'écailles & de pattes d'autres Ecreviſſes à demi digerées. J'ai remarqué dans ces dernieres, que l'eſpace qu'occupoient les pierres étoit rempli par une autre veſſie pleine d'eau dont j'ai déja parlé.

Toutes ces Obſervations nous prouvent,

1°. Que les pierres qui ſe tirent de la tête des

des Ecreviſſes, ne ſont point dans leur cerveau; mais qu'elles tiennent à l'eſtomach qui eſt placé au deſſous.

2°. Il eſt viſible qu'elles ne donnent pas naiſſance à la nouvelle écaille, comme quelques-uns l'ont prétendu, puiſqu'elles ſubſiſtent encore quand l'écaille eſt formée.

3°. On voit encore, qu'en quittant leurs écailles, elles changent d'eſtomach, ſans qu'il paroiſſe que le reſte des autres parties ſe renouvellent, excepté l'inteſtin qui m'a paru ſe renouveller comme l'eſtomach.

4°. Il eſt encore à remarquer, que les pierres ne ſe trouvent dans les Ecreviſſes qu'au tems de leur mûë; qu'elles ſe trouvent enſuite envelopées dans le nouvel eſtomach, où elles diminuent inſenſiblement juſqu'à leur entiere deſtruction.

5°. Il paroît donc que ces pierres auſſi-bien que la membrane du vieil eſtomach, ſervent de nourriture à l'animal pendant la maladie que lui cauſe ſa mûë.

Quelques Auteurs prétendent, que la couleur bleuë de certaines pierres d'Ecreviſſes vient d'une maladie particuliere qui ſurvient à quelques-unes dans le tems de leur mûë. Si ce n'en eſt pas la veritable cauſe, du moins eſt-il certain, que les pierres qui ſe trouvent de cette couleur, prennent une couleur de chair par la cuiſſon. J'ai même obſervé que la ſimple chaleur du Soleil les rougiſſoit.

C'eſt ce qui fait que parmi celles que nous emploions, nous en trouvons de bleuës & de couleur de chair. Il me paroît difficile à croire, que la plus grande partie de ces pierres qu'on nous vend ſoient contrefaites comme quelques-

uns l'ont prétendu, à cauſe, ſelon eux, de la grande quantité qui s'en emploie; puiſque nous voions les Ecreviſſes ſe trouver preſque par tout en très-grande abondance. Outre cela ces pierres ſont diſpoſées par couche comme le Bezoard, ce que l'art auroit peine à imiter. D'ailleurs en les calcinant, elles noirciſſent, s'exfolient, & portent une odeur urineuſe. Ce qui marque qu'elles ſont veritablement tirées du regne animal. En effet par l'analyſe on en tire de l'eſprit urineux avec un peu de ſel volatile. Il y a apparence qu'on tire les yeux d'Ecreviſſes que nous emploions, de celles qui ſont en vie, & que les bleües ou les rougeâtres qui s'y trouvent mêlées, viennent des malades & des mortes.

On attribuë ordinairement aux yeux d'Ecreviſſes une vertu ſimplement abſorbante; mais l'experience ſuivante prouve, qu'ils ont d'autres proprietez qui les portent juſque dans la maſſe du ſang.

Une perſonne pour des aigreurs qu'elle avoit, aiant pris une potion où il entroit des yeux d'Ecreviſſes, ſe ſentit tout à coup priſe d'une eſpece d'hereſipele au viſage qui lui devint bouffi avec de grands piquotemens. Cette bouffiſſure s'étendit juſqu'à la gorge & l'empêchoit d'avaler avec facilité. On craignit d'abord qu'il n'y eût quelque choſe de mêlé parmi les yeux d'Ecreviſſes, ou qu'ils n'euſſent été pilez dans un mortier de cuivre dont ils auroient pris la mauvaiſe qualité. On donna la même potion avec d'autres yeux d'Ecreviſſes qui produiſirent toûjours le même effet. La Malade aiant appris qu'il y avoit des yeux d'Ecreviſſes dans la potion, tira le Medecin de l'inquiétude où il étoit,

toit, en lui disant qu'elle se ressouvenoit, que la même chose lui étoit arrivée toutes les fois qu'elle avoit mangé des Ecrevisses. En effet l'usage des yeux d'Ecrevisses cessé, les accidens cesserent. Depuis on a remarqué que les Ecrevisses causoient à son fils les mêmes accidens. Sur quoi il n'est pas hors de propos de remarquer, combien les temperamens troublent souvent l'effet des remedes.

Quoiqu'on ne parle que des pierres qui se trouvent dans les Ecrevisses de riviere, il y a pourtant une espece d'Ecrevisses qui est celle que l'on nomme *Astacus Marinus*, en François *Homar*, où l'on en trouve. Cette espece est toute semblable à nos Ecrevisses de riviere à la grosseur près.

Au reste s'il y a des gens qui ont de l'aversion pour les Ecrevisses, *Vanhelmont* a remarqué que les Ecrevisses en ont une si grande pour les Porcs, que s'il en passe quelqu'un auprès d'elles, cela les fait mourir. C'est-pourquoi, dit-il, dans le *Brandebourg* où la pêche en est abondante, les Voituriers qui les transportent sont obligez de faire sentinelle la nuit pour empêcher qu'il ne passe de Porcs sous leur charette; car s'il en passoit un, il ne s'en trouveroit pas une en vie le lendemain matin.

EXTRAIT OU ABREGÉ DU PROJET

de M. Reneaume *ſur les Manuſcrits de feu M. de* Tournefort.

PAR M. TERRASSON.

EN *execution de l'art.* 48 *du Reglement donné par le Roi à l'Academie Royale des Inſcriptions, datté du* 16 *Juillet* 1701, *cette Academie & l'Academie Royale des Sciences ſe font tous les ſix mois une députation réciproque, dans laquelle elles s'envoient rendre compte l'une à l'autre par un Diſcours fait exprès, de ce qui eſt lû ou dit de plus remarquable en chacune pendant ces ſix mois. M.* Terraſſon *fut chargé de ce raport pour l'Academie des Sciences lorſqu'il y fut receu en* 1707; *& c'eſt d'un de ſes Diſcours que cet Extrait eſt tiré. Comme il ne s'agit encore que d'un Projet, M.* Reneaume *n'a pas voulu que ſon Memoire qui eſt fort étendu, occupât ici une grande place; & l'on n'a pas crû auſſi devoir differer juſqu'à l'entiere execution d'un deſſein ſi vaſte, de donner une idée de ces ſavans Manuſcrits, dont le Catalogue ſeul fait tant d'honneur à la memoire encore recente de M.* Tournefort.

TOUTES les Societez, & ſur tout celles des Gens de Lettres, regardent les Particuliers morts dans leur ſein comme leur appartenant toûjours par leur nom & par leur memoi-

moire ; & elles ne ſe glorifient pas moins des grands hommes qu'elles ont eus, que de ceux qu'elles ont encore. Cette conſidération, MESSIEURS*, m'oblige à mettre au nombre des Pieces dont je dois vous rendre compte dans ce Diſcours, les Manuſcrits qu'on a trouvez dans le Cabinet de feu M. de *Tournefort*. Inventeur & original dans une Science où il ne ſembloit pas qu'on pût l'être, la diſtribution générale qu'il a faite des Plantes a réduit en Syſtême ce qui n'étoit auparavant qu'un Catalogue très-incomplet, & les principes ſur leſquels il a fondé cette diſtribution & ſi naturels, qu'on peut déſormais ſans connoître toutes les Plantes ſavoir néanmoins toute la Botanique. M. de *Tournefort* n'avoit pû faciliter & abreger ainſi cette Science pour le Public, qu'après avoir eſſuié pour en apprendre lui-même tout le détail un nombre infini de perils & de travaux qui étoient au deſſus du courage ordinaire & de la deſtinée même des Savans. Son deſſein n'étoit pourtant point encore accompli, & lui-même n'avoit regardé ſes Inſtitutions de la Botanique que comme l'eſſai d'un Ouvrage bien plus grand qu'il méditoit. C'eſt ce qu'on a reconnu pleinement par les douze volumes in folio de Recueils & de Memoires que M. de *Tournefort* rempliſſoit & augmentoit tous les jours, & dont la Republique des Lettres a heritié ſous le nom & dans la Perſonne de Monſieur l'Abbé *Bignon*. Mais plus ces Volumes ſont chargez de faits, de découvertes, d'obſervations, moins ils ſont en état d'être expoſez au Public, avant qu'une main ſavante leur ait donn-

* *A Meſſieurs de l'Academie des Medailles & Inſcriptions.*

donné une forme digne de la réputation de leur Auteur. M. *Reneaume* chargé de ce ſoin par Monſieur l'Abbé *Bignon*, a propoſé à l'Academie ſes vûës ſur ce ſujet; & il ne paroît pas que M. de *Tournefort* eût pu porter les ſiennes plus loin. Le premier Volume de ces Manuſcrits eſt le ſeul dont M. de *Reneaume* ne prétende pas faire uſage, parce qu'il ne contient que la liſte des Plantes du Jardin Roial en particulier; & qu'ainſi il ne peut être utile qu'à ceux qui ont la direction de ce Jardin, dont l'ordonnance même a été fort changée. Mais les onze Volumes qui ſuivent, fourniront, ſelon lui, deux Ouvrages differens. Le premier ſera un In-quarto intitulé, *Topographia Botanica cum notis, &c.* Cet Ouvrage ſera tiré du ſecond, du troiſiéme, du quatriéme Volume des Manuſcrits de nôtre Auteur. Le premier de ces quatre contient les Herboriſations de M. de *Tournefort* aux environs de *Paris*, dont il a fait imprimer la meilleure partie en 1698, & pluſieurs autres faites en d'autres lieux par d'autres mains que la ſienne. Le ſecond eſt la Nomenclature des Plantes obſervées par l'Auteur tant en *France* qu'en *Eſpagne* & en *Portugal*: outre cela, un Memoire des Plantes des *Pirenées* & de la *Provence*, qui lui avoit été communiqué par Monſieur le premier Medecin: & un autre qui venoit de M. *Langier* fameux Botaniſte. Joignant à cela les Herboriſations que M. *Reneaume* a faites lui-même dans la *Sologne* & dans le *Berry*, & celles de M. *Chomel* dans l'*Auvergne*: plaçant là le Corollaire des Plantes étrangeres que l'Auteur avoit apportées du voiage de l'Orient, & toutes les autres qui ſeront fournies des Botaniſtes ſavans & fideles

de

de tous les endroits du Monde ; on en fera le fond de la nouvelle Topographie. A l'égard des Notes qu'il faut joindre à cet Ouvrage pour le rendre plus agréable & plus utile, ſi elles ſont purement critiques, il les prendra dans le troiſiéme Volume intitulé par l'Auteur même *Plantarum adverſaria*. C'eſt un Recueil très-curieux des differences qu'il avoit remarquées dans les Botaniſtes ſur les noms & ſur les deſcriptions des Plantes. Il diſtingue les bonnes & les mauvaiſes figures qu'ils en ont fait faire : il releve les erreurs où ils ſont tombez en confondant ſous un même nom des eſpeces differentes, ou en établiſſant des eſpeces differentes ſur de ſimples varietez d'individus. Si ces Notes regardent l'uſage de ces Plantes dans la Medecine, il les prendra dans le quatriéme Volume qui en eſt rempli ; mais comme le choix n'en eſt pas fait, & qu'il eſt important de ne pas abuſer ſur cet article de la confiance que le Public auroit d'ailleurs en cet Ouvrage, M. *Reneaume* emploiera la derniere exactitude à verifier les vertus attribuées par l'Auteur à chaque Plante quand elles ſeront moins connuës.

Voilà le projet abregé du premier Ouvrage qu'on pourroit appeller l'Hiſtoire locale & critique des Plantes par oppoſition à leur Hiſtoire naturelle en générale qui ſera la matiere du ſecond Ouvrage bien plus grand & plus conſiderable que le premier. Il ſera pris des ſept derniers Volumes de nôtre Auteur. Le premier de ces ſept eſt intitulé ou porte pour étiquette, *Obſervationes Botanicæ*. Ces Obſervations ſont ſemées ſelon l'ordre alphabetique, & laiſſent par conſéquent de grands vuides entre elles : le tout enfin n'eſt qu'ébauché ; ou s'il s'y trouve quel-

quelques deſcriptions parfaites, elles ſont du même ordre que celles qui rempliſſent les ſix derniers Volumes, & il faut les y rapporter. Ces ſix Volumes ſont ce qu'il y a de plus complet dans ces Manuſcrits. C'eſt un ample tréſor & un riche fond pour une Botanique univerſelle; ils ſont remplis également & ſous un même titre de deſcriptions de Plantes. Ces deſcriptions ne concernent pas ſeulement le port de chaque Plante priſe en ſa hauteur naturelle: Elles ſont faites ſur des études & des obſervations journalieres, & de ſaiſon en ſaiſon, ou d'année en année à meſure que ces Plantes croiſſoient dans le Jardin Royal ou dans les Campagnes. On y fait mention des differences des Climats, ſelon leſquelles une Plante qui porte des fleurs & des fruits ſur ſon terroir, ne porte ailleurs que des feuilles. On y parle de leur culture ou de leur naiſſance volontaire. Mais tout cela n'eſt pas également verifié; & M. de *Tournefort* qui n'avoit pû voir par lui-même tout ce qu'il dit, marque ſon doute en pluſieurs endroits. De plus le nom de chaque Plante ne porte pas avec lui ſa deſcription; & ce qu'il y en a ſert d'engagement à traiter ainſi toutes les autres. C'eſt en ceci que M. *Rencaume* compte moins ſur ſes ſoins & ſur ſes travaux qui ne ſauroient ſuffire à une execution ſi vaſte, que ſur les ſecours de Meſſieurs nos Botaniſtes, & ſur tout de M. *Marchant*, qui cultive lui-même une infinité de Plantes curieuſes, & qui en donne tous les ans de ſi belles deſcriptions à l'Academie. Il emploiera auſſi celles de M. *Chomel*. Il conſultera l'Herbier de M. *Morin* que M. de *Tournefort* lui-même indique quelquefois. Il remontera aux premiers Memoires de l'Academie

mie dreſſez par feu M. *Dodard* ; il n'excluera point les Memoires étrangers quand ils viendront de quelque main ſûre, tels que ſont entre autres ceux du P. *Plumier* qui a beaucoup étudié les Plantes de l'*Amerique*. Pour l'ordre ſous lequel on rangera toutes ces Plantes, il n'en eſt point de meilleur que celui de la Methode établie dans les *Inſtitutions*. Par-là on fera ſentir de plus en plus la commodité de cette Méthode ; on y accoûtumera les jeunes Botaniſtes, & la place ſera toûjours marquée pour les Plantes qu'on découvrira de ſiecle en ſiecle. Mais en nommant ces Plantes par rapport aux claſſes & aux genres de la Méthode, on joindra à chacune le nom ou le ſynonyme qu'elles ont dans *Gaſpard Bauhin* & dans d'autres vieux Botaniſtes ſi elles leur ont été connuës : on citera même leurs pages pour la commodité des confrontations ; & afin qu'en réformant leur ordre & leur nomenclature, on ne perde pas les lumieres qu'on peut tirer de leurs recherches.

Le corps de l'Ouvrage ſera enrichi de figures, & précedé de quelques Traitez préliminaires, qui expliqueront en général la nature des Plantes, leur anatomie ou leur conſtruction interne, & ainſi du reſte. On y joindra l'Hiſtoire non des Plantes, car c'eſt l'ouvrage même ; mais de la Botanique regardée comme Science. On en rapportera le renouvellement & l'éclat à *Gaſton de France* Duc d'*Orleans*, Oncle de Sa Majeſté, qui aſſembloit dans ſon Palais les plus ſavans hommes en cette matiere ; parmi leſquels ſe diſtinguoit M. *Marchant* le Pere, qui a laiſſé à l'Academie les plus belles figures qu'elle ait dans ſon Tréſor. L'on finira par

des

des Tables faites ſur differentes vûës de commodité, & qui préſenteront tout l'Ouvrage ſous toute ſorte d'aſpects. Un Corps de Botanique ſi entier & ſi achevé, & qui ſoûtiendroit le titre de *Summa Botanica*, n'appartiendroit plus, à proprement parler, ni à M. de *Tournefort* ni à M. *Reneaume*, mais il ſeroit dû à l'Academie entiere : De telle ſorte neanmoins, que ſur le Plan & les Memoires de M. de *Tournefort*, M. *Reneaume* guidé par les conſeils de Meſſieurs nos Academiciens auroit donné un Ouvrage, dans lequel on trouveroit tout l'ordre, toute l'uniformité, toute la perfection qu'on ne peut attendre que d'un ſeul eſprit & d'une ſeule main : toute la diſcuſſion, toute l'étenduë, toute l'infaillibilité qui peut réſulter des Conferences d'une ſavante Compagnie.

ECLAIRCISSEMENS SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITEZ.

SECOND MEMOIRE.

PAR M. ROLLE.

* VOICI la ſuite des Eclairciſſemens que j'ai donnez ſur la Conſtruction des Egalitez dans un Memoire du 11 Juillet 1708. Ce Memoire eſt imprimé parmi les autres Mémoires que l'Academie a donnez au Public la même année, page 436. Il eſt neceſſaire d'en rap-

* 7. Août 1709.

rappeller le ſouvenir pour l'intelligence de ce qui ſuit.

ARTICLE I. C'eſt une maxime de la Methode en queſtion: Que dans une effection géométrique le nombre des Points où les Courbes ſe rencontrent, eſt toûjours égal au nombre des différentes Racines réelles de l'Egalité que l'on s'eſt propoſé de conſtruire.

C'eſt encore une maxime de la même Méthode: Que chacun de ces Points donne une de ces Racines.

J'ai marqué pluſieurs exceptions de ces maximes dans mon premier Memoire. Mais je n'ai pas encore expliqué comment il arrive dans l'effection géometrique, que les Courbes ſe rencontrent en autant de points qu'il y a de differentes racines réelles dans l'Egalité à conſtruire ſans donner aucune de ces racines qu'en certains cas, la premiere des deux maximes que je viens de citer ſe trouve parfaitement remplie, & que dans ces mêmes cas l'autre maxime eſt par tout combatuë : que l'on ne trouve pas les racines qu'on demande, & que l'on en trouve d'autres qui en ont de fortes apparences. C'eſt la premiere difficulté que je tâcherai d'expliquer dans ce premier Article.

Il y a des cas auſſi, où le nombre des points de rencontre eſt tantôt plus grand, & tantôt plus petit que le nombre des differentes racines de l'Egalité propoſée, & où il arrive, comme dans les cas précédens, que la méthode ne donne aucune de ces racines & en donne d'autres qui impoſent. J'en donnerai ici des exemples.

En d'autres cas, cette méthode donne, ou toutes les racines de l'Egalité à conſtruire, ou ſeulement quelques-unes. Mais en même tems elle

elle donne auſſi des racines réelles qui n'appartiennent pas à cette Egalité, & cela par des cauſes très-differentes de celles qui ont été expliquées dans le premier Memoire. En ſorte qu'il ſeroit ſouvent difficile de diſtinguer dans la conſtruction les racines que l'on demande de celles qu'il faut rejetter. Ainſi, il eſt bon d'en donner des exemples, & c'eſt par-là que finira ce premier article.

Je n'entreprens pas, cette fois, de faire connoître toute l'étenduë de ces inconveniens, ni l'étenduë des autres inconveniens de la Méthode qui ſeront indiquez dans ce Memoire. Je me propoſe ſeulement d'en prouver la réalité, en attendant une nouvelle Theorie qui marquera ce qu'il faut retenir de cette Méthode, & ce qu'il faudroit y ajoûter pour la mettre en état de produire les effets qu'on lui attribuë, lorſque cela eſt poſſible.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple, l'Egalité que l'on ſe propoſe de conſtruire ne renferme qu'une racine réelle. La Méthode ne donne pas cette racine, & donne une racine réelle étrangere.

L'Egalité à conſtruire eſt celle qu'on voit en *A*.

A. $x^5 + a^4x - 2a^5 = 0$.

Le lieu donné eſt le lieu marqué *B*.

B ... $yyxx + 2a^4 = a^3x$.

Et le ſecond lieu que fournit la Méthode ſe préſente d'abord comme il eſt en *C*.

C ... $aax^3 - 4a^3xx + 4a^4x + xy^4 - 2ay^4 = 0$.

Mais il ſe diviſe par $x - 2a$, & la diviſion le reduit aux termes marquez *D*.

D ... $aaxx - 2a^3x + y^4 = 0$.

Com-

Comme la racine que donne la conſtruction eſt toûjours la même, ſoit que l'on prenne C, ou que l'on prenne D, il eſt mieux de prendre le plus ſimple. Ainſi, il faut conſtruire ſur un même axe * EO & une même origine O, le lieu donné B & le lieu trouvé D, ſuivant la Méthode. Ce qui produira l'effet que déſigne la premiere figure.

Le premier lieu fournit la feuille infinie $CRMPNSC$. Et le ſecond lieu donne le Cercle du ſecond genre $OPCGO$.

Ces deux Courbes ſe touchent au point C & ne ſe rencontrent que dans ce point. D'où il faudroit conclure ſelon la Méthode, que l'appliquée OC commune aux deux Courbes eſt la racine de l'Egalité A, & conclure auſſi que cette Egalité n'a point d'autre racine.

Mais il ſe trouve tout au contraire que l'Egalité A renferme une racine que la conſtruction ne donne pas, & que la racine OC qu'elle donne, n'eſt pas de cette Egalité.

Car 1°, la Reſolution analytique de l'Egalité A fait voir que a eſt l'unique racine réelle de cette Egalité ; de plus, cette racine ne ſe trouve pas dans la Conſtruction : parce qu'il faudroit pour cela qu'elle fût dans les lieux B. D. & en la ſubſtituant à la place de x dans le lieu B, il arrive que la valeur de y qui devroit en être l'abſciſſe n'eſt autre choſe que la valeur imaginaire $\sqrt[2]{-aa}$. Ainſi, la racine de A ne ſe trouve pas dans le premier lieu, ni par conſéquent dans la conſtruction.

2°. Je dis qu'il n'y a qu'une racine dans la conſtruction, & que cette racine eſt étrangere. Car

* Fig. I.

Car en comparant les lieux conſtruits *B. D*, pour faire évanouïr *y*, la réduite ſe diviſe par la propoſée *A*, & donne au quotient l'Egalité $xx-4ax+4aa=0$; ainſi cette Egalité renferme toutes les racines étrangeres qui peuvent ſe trouver dans la conſtruction. Mais elle ne donne que $2a$ pour la valeur de x, & $2a$ étant ſubſtituée à la place de x dans les lieux *B. D.* chaque ſubſtitution donne $y=0$, & ne donne point d'autre valeur de *y*. D'où il ſuit que la Méthode dans cet exemple, n'a introduit que la ſeule racine étrangere $2a$, & que cette racine eſt dans la conſtruction, puiſqu'elle ſe trouve dans une ſolution des lieux. De là il ſuit auſſi qu'elle n'y eſt qu'une fois; puiſque l'une & l'autre ſubſtitution n'a donné qu'une valeur de *y* pour abſciſſe. Donc l'effection géometrique ne donne pas la racine de l'Egalité à conſtruire (par 1°.) & donne une racine qui n'appartient pas à cette Egalité (par 2°.). *Ce qu'il falloit, &c.*

Remarque. Pour reconnoître les veritables racines dans la conſtruction & les diſtinguer des racines étrangeres que la Méthode y introduit. Pour ſavoir auſſi combien de fois les unes & les autres s'y trouveront, & pour s'aſſurer de celles qui n'y entrent pas, il ſuffiroit de réſoudre en termes analytiques le Problême qu'expriment les lieux conſtruits, d'une maniere relative à cette Méthode. On a pû ſe donner quelque idée de la réſolution de ce Problême dans l'exemple précédent, & l'on auroit occaſion de perfectionner cette idée dans d'autres Exemples que l'on verra ici. Mais l'on verra encore mieux dans les Memoires ſuivans, les difficultez qui en ſont inſéparables & la neceſ-

ſité

sité de les réſoudre, quand on veut reconnoître les écueils de la Méthode en queſtion.

SECOND EXEMPLE.

Les Courbes ſe coupent en deux points dans cet exemple, & il n'y a auſſi que deux racines réelles dans l'Egalité à conſtruire. Mais les racines que donnent ces points ne ſont pas de cette Egalité.

L'Egalité propoſée eſt l'Egalité *E*. Je la prens fort ſimple, afin que le calcul ne ſoit pas rebutant.

$E \ldots 4xx - aa = 0.$

Pour la conſtruire on donne le lieu *F*.

$F \ldots yyxx + 6a^3 = 9aaxx + 4a^3x.$

Et la Méthode fournit le ſecond lieu *G*.

$G \ldots yy + 15aa = 16ax.$

Conſtruiſant ces lieux ſelon cette Méthode ſur l'axe *DL* & ſur l'origine *O*; l'effection géometrique ſera repreſentée comme dans la ſeconde figure.

Les valeurs poſitives de *x* dans le lieu *F* donnent les rameaux infinis *BSP*. *BTQ*.

Les valeurs négatives de *x* fourniſſent encore des rameaux infinis *AM*. *AN*.

Le lieu *G* donne la parabole *VSCTZ*.

Cette parabole rencontre l'autre Courbe aux points *S*, *T*, & ne la rencontre que dans ces deux points. Ainſi, la Conſtruction donne les deux racines *SD*, *TL*, & n'en donne point d'autres. D'où il faudroit conclure, ſuivant la Méthode en queſtion, que ces deux racines ſont celles de l'Egalité propoſée *E*, & qu'elle n'en renferme point d'autres. Il ſembleroit mê-

même que cela ſe confirme, en ce que *SD*, *TL* ſont de même grandeur & differemment placées dans la conſtruction, & que les deux racines de l'Egalité à conſtruire ſont auſſi de même grandeur ſous differens ſignes. Mais comme cette Egalité eſt fort ſimple & ces racines commenſurables, & que la racine étrangere eſt auſſi commenſurable; il eſt très-facile de s'aſſurer par les voies dont je me ſuis ſervi dans le premier Exemple: Que la Méthode donne dans celui-ci autant de racines réelles, qu'il y en a dans l'Egalité que l'on s'étoit propoſé de conſtruire, & qu'il n'y a dans la conſtruction aucune des racines de cette Egalité.

A la place de l'Egalité *E*, on peut en prendre une autre auſſi compoſée qu'on voudra, ſoit dans ſes termes ou dans l'élevation de ſon degré, & ſe propoſer de la conſtruire en prenant *F* pour le premier lieu. Alors on verra que les Courbes ſe rencontreront en deux points pour la racine étrangere, quand même toutes les racines de la propoſée ſeroient imaginaires. De plus, les racines de la propoſée étant réelles, elles ne ſe trouveront pas dans la conſtruction lorſqu'elles ne ſeront point de celles que renferme le lieu *F*; & la compenſation des deux inconveniens produira un troiſiéme inconvenient qui aura du rapport à celui que déſignent les deux premiers Exemples. On peut faire de ſemblables obſervations ſur chaque premier lieu, dont il ſera parlé dans les Remarques ſuivantes.

REMARQUE I. Si l'on veut un Exemple où les Courbes ſe rencontrent en autant de points qu'il y a de racines dans l'Egalité à conſtruire ſans donner aucune de ces racines: de maniere que

que les racines étrangeres ſoient de differentes grandeurs; on n'a qu'à prendre le lieu $yyx^3 + xx + 8 = 6x$, & ſe propoſer de conſtruire l'Egalité $x^4 - 4x + 2 = 0$. Alors, on verra que les Courbes ſe rencontrent en deux points, & que les deux racines qu'ils donnent ſont differentes. On y verra auſſi que ce ne ſont point les deux racines réelles que cette Egalité renferme.

REMARQUE II. Il y a quantité d'Exemples où le nombre des points de rencontre eſt plus grand ou plus petit que le nombre des racines réelles de l'Egalité propoſée.

Exemple I. Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'Egalité $xx + 2 = 0$, le premier lieu étant $yxx + 1 = x$: alors le ſecond lieu ſera $x + 2y = 1$. Et la droite rencontrera la Courbe en un point. Ainſi, la conſtruction donnera une racine réelle. Cependant il eſt viſible que la propoſée ne renferme que des racines imaginaires.

Exemple II. Si l'on a le lieu $yyxx + x = 4$, pour conſtruire l'Egalité $x^3 - 3x + 1 = 0$, les Courbes ne ſe rencontreront qu'en un point, & néanmoins il y a trois racines réelles & differentes dans l'Egalité propoſée.

REMARQUE III. Souvent la Méthode donne les racines de l'Egalité propoſée ou du moins quelques-unes, lorſque le nombre des points de rencontre ſurpaſſe le nombre de ces racines & même quand il ſurpaſſe le nombre des dimenſions de cette Egalité. Delà pluſieurs difficultez quand il faut les démêler des racines étrangeres dans la conſtruction. On commencera à ſentir ces difficultez, ſi l'on prend le lieu $yyxx + 6a^4 = 9aaxx + 4a^3x$, pour conſtruire l'Egalité $x^3 - 3aax + a^3 = 0$. La Méthode

donnera le ſecond lieu $4axx+21aax+ayy=3yyx+9a^3$. Et l'on trouvera que la Conſtruction ne donne que deux racines de l'Egalité propoſée, quoique les Courbes ſe coupent en ſix points, & qu'il y ait trois racines dans cette Egalité.

On verra encore mieux ce ſurcroit de racines étrangeres & les difficultez qu'elles produiſent dans la Méthode, ſi l'on prend pour le premier lieu d'une conſtruction celui que l'on voit ici en *K*.

K . . . $y^4x^7+6aab^4x^4+a^3x^7+a^6b^4=4aayx^7$
$[+b^4x^6+9a^4b^4xx=0.$

Alors les Courbes ſe rencontreront toûjours en dix-huit points pour les ſeules racines étrangeres, quand même l'Egalité à conſtruire ne renfermeroit que des racines imaginaires. Ce qui augmente conſiderablement lorſque cette Egalité renferme des racines réelles differentes des racines étrangeres. Par exemple, dans l'hypothêſe que l'Egalité à conſtruire renferme douze racines réelles ſeulement, toutes differentes entr'elles & differentes auſſi des racines étrangeres; les Courbes ſe rencontreroient du moins en trente points, & tout au plus en cinquante-quatre points, ſelon la grandeur de ces douze racines ou le rapport qu'elles auroient aux racines étrangeres.

REMARQUE IV. Il y a un grand nombre de lieux qui fourniſſent des racines étrangeres de l'eſpece indiquée par les précedens exemples, quand on ſe ſert de la Méthode en queſtion. Car s'il arrive que le premier terme de l'inconnuë principale ſoit affecté de l'autre inconnuë dans le premier lieu, & que parmi les termes moiens de cette inconnuë principale, il y ait un monome dans lequel l'autre inconnuë ne

ſe

ſe trouve pas. Alors, cette Méthode introduit toûjours des racines étrangeres dans les Réduites de quelque nature que ſoit l'Egalité à conſtruire. Ces racines ſe trouvent encore toûjours une ou pluſieurs fois dans la conſtruction lorſqu'elles ne ſont pas imaginaires & que leurs abſciſſes ſont auſſi ou réelles ou θ. Ce qui arrive ſouvent auſſi, lorſqu'il n'y a point de ces monomes.

Il peut encore s'introduire des racines étrangeres dans l'uſage de cette Méthode, quoique le premier terme de l'inconnuë principale ne renferme pas l'autre inconnuë. On en verra un exemple dans la Remarque ſuivante.

REMARQUE V. Il y a des racines étrangeres qui ſont égales aux veritables racines; & il y a des cas auſſi où les unes & les autres ſeroient inacceſſibles, quoique compriſes dans la conſtruction; parce que ces racines ſeroient placées à une diſtance infinie de l'origine. En voici un Exemple.

Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'Egalité $xx - 3ax + 2aa = 0$ en prenant $xx = xy - 2ay$ pour le premier lieu; la Méthode donnera le ſecond lieu $yx + 2aa = 2ay + 3ax$, & ces deux hyperboles ſe couperont à portée pour la racine $+a$. Mais pour l'autre racine $2a$, ces Courbes ne ſe rencontreroient que dans un point inacceſſible; c'eſt celui où elles toucheroient un aſymptote qui eſt commun à l'une & à l'autre. Ainſi cette racine ſeroit placée dans la conſtruction à une diſtance infinie de l'Origine, & il en ſeroit de même de la racine étrangere qui s'eſt introduite: parce qu'elle eſt égale à la veritable racine $2a$.

REMARQUE VI. La Combinaiſon du premier

& du ſecond lieu ni celle des autres lieux qui en réſultent, ne ſerviroient pas à remedier aux inconveniens que j'ai marquez dans ce prémier article ni aux inconveniens expliquez dans le premier Memoire. Ce ne ſeroit pas auſſi un moien général pour éviter ceux qui viennent des racines étrangeres, de prendre un premier lieu où l'inconnuë principale auroit des valeurs poſitives & négatives de toutes les grandeurs. Cette condition ſe trouve dans l'exemple de la 5e Remarque, & l'inconvenient ne laiſſe pas d'y être. Et quoique la même condition ſe puiſſe trouver dans la moitié des premiers lieux que renferme la détermination générale de la 4e Remarque, cela n'empêche pas que la Méthode ne jette dans l'inconvenient des racines étrangeres indiqué dans cette Remarque.

ARTICLE II. On eſt dans ces préjugez; que les Courbes ſe touchent toûjours dans les Conſtructions, quand elles donnent des racines égales, & qu'elles ne ſe coupent jamais au point où elles ont une même tangente. Il eſt rare auſſi en un ſens, qu'elles ſe coupent lorſqu'elles donnent ces racines; mais il ne laiſſe pas d'y en avoir quantité d'Exemples. En voici un qui en fournit une infinité d'autres dans chaque genre, où l'on verra que les Courbes ſe coupent au point qui donne les racines égales, & que ces Courbes ont une même tangente dans ce même point.

Exemple. Si l'on ſe propoſe l'Egalité *L* dont toutes les racines ſont égales.

$$L \ldots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

Et que pour la conſtruire on ait le premier lieu $xx = ay$, la Méthode donnera le ſecond lieu *M*.

M...

$M \ldots xy - 3ay + 3ax - aa = 0$.

Conſtruiſant l'un & l'autre lieu ſur un même axe OF & une même origine O, la conſtruction ſera repreſentée comme dans la 3e Figure. De maniere que les Courbes ſe coupent en un point C, & que l'appliquée FC exprime chacune des racines de la propoſée L.

Mais à cauſe que ces racines ſont égales, on ſeroit porté à croire que les Courbes ne ſe coupent pas au point C, & l'on eſt fortifié dans ce ſentiment, quand on prend les tangentes de l'une & de l'autre Courbe au même point C. Car ces deux tangentes ſe trouvent égales, & comme ces Courbes n'ont qu'un même axe & une même origine; que leur appliquée & leur abſciſſe eſt auſſi la même en ce point, il eſt évident que ces deux tangentes ſe confondent, & ne ſont qu'une même tangente. Ce qui eſt la marque la plus ordinaire des Courbes qui ſe touchent. Et c'eſt auſſi ce qui m'a obligé de prendre ici une autre voie pour prouver que le point C donne les racines égales de l'Egalité L, & que la parabole OCH coupe l'hyperbole BCG au même point.

1°. Je dis que la conſtruction donne toutes les racines égales de l'Egalité L, & que toutes ces racines n'ont qu'une ſeule abſciſſe.

Car la réſolution analytique de cette Egalité donne $x = a$ pour chacune de ces racines égales, & nous aſſure qu'elle n'a point d'autres racines.

De plus, ſubſtituant a dans les lieux à la place de x, les deux ſubſtitutions donnent $y = a$, pour une abſciſſe de la racine $x = a$, & ne donnent point d'autre valeur de y.

Donc, la conſtruction &c. Ce qu'il falloit &c.

2°. Les Courbes ne ſe rencontreront qu'en un point dans la Conſtruction.

Car, en faiſant évanouïr y, la Réduite des lieux ſe trouve la même que l'Egalité à conſtruire : ainſi, il ne s'eſt introduit aucune racine étrangére dans la Conſtruction.

On vient de voir auſſi par (1°.) que toutes les racines de cette Egalité n'ont qu'une ſeule abſciſſe. Donc les Courbes ne ſe rencontrent qu'en un point dans la Conſtruction.

3°. Il y a deux points ſur l'axe OF; l'un au deſſus de F où la parabole eſt plus proche de cet axe que l'hyperbole, & l'autre au deſſous de F, où l'hyperbole eſt plus proche du même axe que la parabole. Ce qui peut ſe prouver en cette maniere.

Aiant pris $y = 0$ pour une abſciſſe de la parabole au point O qui eſt au deſſus de F, on aura $x = 0$ pour ſon appliquée. Ainſi, le point O eſt à cette parabole. Mais prenant $y = 0$ pour une abſciſſe de l'hyperbole, on trouve $y = \frac{1}{3}a$ pour l'appliquée OA de cette Courbe, & $\frac{1}{3}a$ eſt plus grand que 0. Donc au point O qui eſt au deſſus de F, l'hyperbole s'éloigne de l'axe OF plus que la parabole.

Prenant auſſi $y = 2a$ ſur le même axe pour un point R au deſſous de F & pour l'abſciſſe de l'une & de l'autre Courbe, on aura $x = \sqrt{2aa}$ pour l'appliquée RH de la parabole, & $x = \frac{7}{3}a$ pour l'appliquée RG de l'hyperbole. Mais $\frac{7}{3}a$ eſt plus petite que $\sqrt{2aa}$. Donc RG eſt plus petite que RH. Donc, il y a un point R ſur l'axe OF au deſſous de F où l'hyperbole eſt plus proche de cet axe que la parabole.

Donc

Donc, il y a deux points ſur l'axe *OF* &c.

4°. Entre les deux appliquées *OA*, *RH*, les deux Courbes demeurent toûjours concaves vers l'axe *OF*. Il ne ſe trouve entre ces deux appliquées ni inflexion, ni recourbement, ni rebrouſſement, ni aſymptote, ni limite, ni rien qui rompe cette concavité vers cet axe. Ce que je ſuppoſe évident dans cet exemple; parce que ces Courbes ont été fort examinées & ſont auſſi fort connuës.

Ainſi, la Conſtruction dans l'exemple propoſé, donne toutes les racines égales de l'Egalité *L* au point C par (1° & 2°).

Les Courbes ſe coupent au même point *C* par (3° & 4°), puiſque la Courbe la plus proche de l'axe au deſſus de *C* eſt celle qui s'en éloigne davantage au deſſous de ce point, & que dans l'intervalle ces deux Courbes demeurent toûjours concaves vers l'axe *OF*.

Donc le point *C* donne les racines égales de l'Egalité *L* que l'on s'étoit propoſé de conſtruire, & la parabole *OCH* coupe l'hyperbole *BCG* au même point *C*. Ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE I. On peut ſavoir par cette voie, ſi deux Courbes géometriques quelconques ſe touchent ou ſe coupent aux points où elles ſe rencontrent. Mais dans le deſſein qu'on auroit de former ſur cela une Méthode génerale, ce ſeroit peu de réduire ces Courbes à un même axe & à une même origine, il faudroit encore avoir les limites propres aux appliquées qui donnent les points de rencontre avec la détermination des points notables qui ſe trouveroient entre ces limites, parmi leſquels je comprens ceux qui terminent des aſymptotes, lorſque ces

aſymptotes eux-mêmes ne ſont pas du nombre des limites.

REMARQUE II. Sur l'idée de ce premier exemple L, M, on peut trouver en differentes manieres autant de formules qu'on voudra qui fourniront une infinité de lieux de tous les genres dont les Courbes couperont à Tangentes égales une Courbe géometrique donnée dans un de ſes points pris à volonté; pourvû que ce point ne ſoit pas de ceux qui ſeront exceptez ci-après.

Pour donner un avant-goût de ces Formules j'en propoſerai ſeulement deux ou trois du premier genre, dans leſquelles je prens pour la Courbe donnée, la parabole N.

$N \ldots . xx = cy.$

En multipliant l'Egalité L, par $x-b$ & prenant N pour le premier lieu de l'Egalité réſultante, on aura pour ſecond lieu la formule qu'on voit en O.

$$O \ldots ccyy - bcxy + 3abcy - 3aabx + ba^3 = 0.$$
$$- 3acxy + 3aacy - a^3x.$$

Prenant pour b une ligne connuë à volonté, & conſtruiſant les lieux N, O ſur un même axe & une même origine, ils ſe rencontreront en deux points, excepté le cas où ces points ſe confondent. Un de ces points donnera $x = a$ pour les racines égales de l'Egalité L, & l'autre $x = b$ pour la racine introduite. De maniere que ſi l'on prend arbitrairement un point ſur la parabole N hors ſon ſommet, & a pour ſon appliquée, les Courbes ſe rencontreront dans ce même point. Sur quoi il faut obſerver:

1°. Si $b = -a$ le lieu O ne donnera que deux lignes droites, dont l'une touchera la parabole & l'autre la coupera au point donné ou choiſi.

2°. Si

2°. Si $b=a$, l'hyperbole que donnera O, touchera la parabole N au point choisi.

3°. Si $b=-3a$ le lieu O fournira une parabole qui coupera à Tangentes égales la parabole donnée au point donné.

4°. Et lorsque le point donné ou choisi sera celui du sommet de la parabole N, le lieu O ne fournira que deux lignes droites, dont l'une se confondra avec un des axes générateurs.

5°. Mais en tout autre point de la parabole donnée, les autres valeurs de b fourniront dans O une infinité d'hyperboles qui couperont cette parabole à Tangentes égales au point donné ou choisi.

Si $b=-\frac{1}{3}a$, l'hyperbole DCH, coupera la parabole donnée $DOLV$ (*fig.* 4.) au point donné C.

Si $b=2a$, l'hyperbole $TCSV$, coupera aussi la parabole en C.

Et $b=0$ donnera une autre hyperbole OCK qui coupera encore la parabole donnée au point C.

Ainsi de suite à l'infini. Ensorte que cette infinité de Courbes se couperont en C & n'auront qu'une même Tangente dans ce point C.

Les Bornes de ce Memoire & le choix des Propositions qu'il doit renfermer ne permettent pas de mettre ici les preuves des intersections. En attendant on peut s'en assurer dans chaque Exemple par la voie dont je me suis servi sur l'Exemple LM. Pour l'identité des Tangentes il ne faut aucun détail. Car, laissant b indéterminé dans O, on trouvera d'abord que la soûtangente sur l'axe des y est $\frac{2aa}{c}$, de même que dans N. Ce qui peut servir pour abreger la démon-

monſtration génerale des Interſections qui ſe font en *C*. Voici d'autres Formules.

REMARQUE III. Dans la Remarque précedente on peut faire varier le ſecond lieu autant qu'on voudra par la voie des ſubſtitutions. A la place de $x-b$, on peut auſſi prendre un multiplicateur de *L*, où x ait autant de termes qu'on voudra & dont tous les coëfficiens ſoient exprimez par des indéterminées chacun par une ſeule differente des autres. Ce qui fournit pluſieurs voies différentes & très-génerales pour trouver des Formules dans chaque genre dont les Courbes couperoient à Tangentes égales une Courbe donnée dans un point donné. A quoi on peut encore ajoûter la combinaiſon des lieux, comme une voie des plus expeditives pour la varieté des Formules, comme on le dira dans un autre Memoire. J'en donnerai ſeulement deux ici qui ſe tirent aiſément de la 2e Remarque par la voie des ſubſtitutions, ou par les combinaiſons.

La premiere eſt celle qu'on voit ici en *P*.

P... $nnxx-ccyy+6aacy-nncy-8a^3x+3a^4=0$.

Si $n=2a$. La Formule *P* ne donne que deux lignes droites, dont l'une touche la Parabole donnée au point donné, & l'autre la coupe au même point.

Si le point donné eſt au ſommet de la parabole. Alors les hyperboles que fournit *P* la touchent dans ce même point.

En tout autre point de cette parabole, la Formule *P* fournit une infinité d'hyperboles differentes entr'elles & differentes encore de celles que donne *O*, ſelon les differentes valeurs que l'on prend pour n.

Si $n=3a$ la Formule *P* donne une hyperbole

le *GDFM* (*fig.* 5.) qui coupe la parabole donnée *GON*, au point choisi ou donné *F*.

Et lorsque $n = a$ la Formule *P* fournit une autre hyperbole *PFIG* qui coupe aussi la parabole au point *F*.

Les autres valeurs de *n* donneront dans *P* une infinité d'autres hyperboles qui couperont la parabole donnée en *F*; ensorte que *EF* sera toûjours la valeur de chaque racine égale, & que cette infinité de Courbes n'aura qu'une même Tangente dans ce point *F*.

La seconde Formule est celle qu'on voit ici en *Q*.

$$Q \ldots rrxx + ccyy - 6aacy - rrcy + 8a^3x - 3a^4 = 0.$$

Lorsque $r = c$, ce lieu fournit un cercle dont le raion varie selon les differens points de la parabole donnée.

Mais si l'on prend arbitrairement pour *r* une valeur differente de *c*, la même Formule donnera une Ellipse. Ainsi, pour chaque point de la parabole donnée, la Formule *Q* fournira un Cercle & une infinité d'Ellipses qui la couperont à Tangentes égales dans tous ces points; excepté au sommet, où ce Cercle & ces Ellipses toucheront cette Parabole. Comme les intersections se feront dans le sens de *PFIG* (*fig.* 5.) il paroît inutile de donner sur cela une autre figure.

REMARQUE IV. Je donnerai en d'autres Memoires d'amples éclaircissemens sur les Propositions suivantes.

1°. On peut trouver des Formules autant qu'on voudra dont les Courbes couperont une autre Courbe à Tangentes égales en autant de points qu'on voudra dans une même construction. Pour cela, on a deux voies

dont on peut ſe ſervir, ou enſemble ou ſeparément.

La premiere conſiſte dans la multiplicité des abſciſſes de chaque racine égale. Par exemple, ſi l'Egalité à conſtruire eſt celle qu'on voit en *L*.

$$L \ldots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

Et que l'on ait pour premier lieu le Cercle *R*.

$$R \ldots xx = 5aa - yy.$$

Ce Cercle coupera en deux points à Tangentes égales la Courbe que donne le ſecond lieu.

Les differens ordres de racines égales que renferme l'Egalité à conſtruire, ſont auſſi une voie pour cette recherche. Ainſi multipliant *L*. par $x^3 - 6axx + 12aax - 8a^3 = 0$, on aura *S*.

$$S \ldots x^6 - 9ax^5 + 33aax^4 - 63a^3x^3 + 66a^4xx - [36a^5x + 8a^6 = 0.$$

Et conſtruiſant cette Egalité en prenant $xx = ay$ pour le premier lieu, cette parabole ſera coupée en deux points à Tangentes égales par la Courbe du ſecond lieu. Cette ſeconde voie convient aux Courbes données bien mieux que la premiere voie.

Si l'on conſtruit *S* en prenant *R* pour le premier lieu, les deux voies ſe trouveront de concert. Auſſi l'on verra que les Courbes ſe couperont en 4 points à Tangentes égales.

2°. Il y a quantité d'exemples où les Courbes ſe coupent à Tangentes inégales au point où elles donnent des racines égales, & même des exemples où cela ſe trouve pluſieurs fois dans une même conſtruction.

Si l'Egalité à conſtruire eſt *T*.

$$T \ldots x^{12} + 2a^5x^7 - 4a^6x^6 + a^{10}xx - 4a^{11}x [+ 4a^{12} = 0.$$

Et

Et que l'on ait pour le premier lieu $x^3 = aay$. Alors le ſecond lieu ſera V.

$$V \ldots y^4 + 2ayyx - 4aayy + aaxx - 4a^3x \left[+ 4a^4 = 0.\right.$$

Les Courbes ſe couperont en deux points. Un de ces points donnera les deux racines de T qui ſont commenſurables; l'autre point, les deux racines égales incommenſurables, & l'on verra que dans chacun de ces points, les Tangentes des deux Courbes ſont fort differentes. Si l'on veut ſur cela un exemple dans lequel il n'y ait qu'une couple de racines égales, on n'a qu'à prendre $x^3 = aay$ pour conſtruire $x^5 - ax^4 + a^3xx - 3a^4x + 2a^5 = 0$. On verra que les Courbes ſe coupent pour les racines égales & que les Tangentes ne ſont pas les mêmes au point d'interſection qui donne ces racines.

3°. En d'autres cas, les Courbes ſe coupent à Tangentes égales, quoique l'Egalité propoſée ne renferme point de racines égales, comme on le verra ſi l'on prend $yxx + 1 = x$ pour conſtruire $x^4 - 2x + 1 = 0$. Alors les Courbes ſe couperont à Tangentes égales pour $x = 1$ qui eſt une des racines inégales de l'Egalité propoſée. Il ſe trouve encore dans cet exemple qu'un autre rameau du ſecond lieu coupe la Courbe du premier lieu au point de $x = 1$, pour les racines égales de la réduite, & néanmoins la Tangente de ce rameau n'eſt pas la même dans ce point que la Tangente de cette Courbe.

Il y a auſſi des cas où les Courbes ſe touchent, & d'autres cas où elles ſe coupent à Tangentes égales, quoique toutes les racines de la propoſée ſoient imaginaires.

4°. Il peut même arriver que la plûpart de ces inconveniens ſoient joints à d'autres incon-

veniens qui ſont beaucoup plus conſiderables pour la méthode en queſtion. Si pour conſtruire $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, on a pour premier lieu $x^3 = 6xx - 12x + yy + 8$, le ſecond lieu ſera $x = 2 + yy$. Et l'on trouvera que les Courbes ſe touchent d'une maniere peu commune pour la racine $x = 2$: Qu'elles ſe coupent en deux endroits pour la racine $x = 3$, & qu'elles ne ſe rencontrent pas pour la racine $x = 1$.

ARTICLE III. Dans l'uſage de la Méthode en queſtion, le premier lieu eſt ou donné ou pris à volonté. Lorſqu'on peut le prendre à volonté, on peut auſſi éviter les inconveniens qui regardent le fond de cette Méthode, ou en tirer avantage pour s'aſſurer en pluſieurs cas des conſtructions impoſſibles. Ce qui m'oblige de marquer ici entre tous ces inconveniens, ceux qui regardent particulierement le choix du premier lieu & l'uſage du ſecond lieu. Car les premiers lieux les mieux choiſis donnent aſſez ſouvent de ſeconds lieux imaginaires, ou des lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite; ou des lieux diviſibles qui dans l'uſage ordinaire, donneroient l'excluſion à des racines réelles de l'Egalité à conſtruire; & l'experience a fait voir qu'il eſt neceſſaire d'expliquer ces inconveniens avant que d'y remedier. Voici des Exemples avec des Remarques qui ſerviront à ce deſſein.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple l'Egalité à conſtruire renferme pluſieurs racines réelles: Elle eſt la même que la réduite des lieux, comme on le déſire dans la Méthode. Le premier lieu eſt auſſi réel; il fournit une Courbe dont les quatre rameaux

meaux s'étendent à l'infini & donnent une infinité d'appliquées positives avec une infinité d'appliquées negatives. Cependant le second lieu que fournit la Méthode est un lieu absolument imaginaire.

L'Egalité à construire est l'Egalité *A*.

$$A \ldots x^8 + n^5xx \pm n^7x - n^8 = 0.$$

Le premier lieu est celui que l'on voit en *B*.

$$B \ldots x^4 = nnyy + 2n^4.$$

Et la Méthode donne le second lieu *C*.

$$C \ldots nnxx \pm n^3x + y^4 + 4nnyy + 3n^4 = 0.$$

En voulant construire ces lieux, on verra que *B* fournit une hyperboloïde du second genre. Mais quand on viendra au second lieu *C* que la Méthode a donné, on trouvera qu'en prenant à volonté une valeur réelle pour une des inconnuës laquelle on voudra ; l'autre inconnuë n'a que des valeurs imaginaires, & si l'on observe comment cela arrive, on s'appercevra qu'en vain l'on chercheroit une Solution réelle de ce lieu *C*. On le verra peut-être mieux si l'on dégage x par la régle ordinaire du second degré. Alors la valeur de cette inconnuë sera exprimée, comme on le voit en *D*.

$$D \ldots x = \pm \tfrac{1}{2}n \pm \sqrt{-\tfrac{11}{4}nn - 4yy - \tfrac{y^4}{nn}}.$$

Où l'on peut voir qu'en prenant pour y une valeur réelle comme on voudra, ou positive, ou negative, ou même le 0, la somme des monomes que renferme le signe radical sera toûjours negative ; & par conséquent ses racines toûjours imaginaires. On voit que les autres parties de la valeur de x n'ont rien qui puisse détruire ces racines, & qu'elles ne peuvent être séparées par

par la diviſion. Ce qui me paroît ſuffire pour s'aſſurer que toutes les valeurs de x dans D ſont des valeurs imaginaires lorſque y eſt réel ; & pour s'aſſurer auſſi que le lieu C, que la Méthode a donné, eſt un lieu abſolument imaginaire.

On pourroit encore voir que ce lieu C n'a aucune ſolution réelle, en y appliquant la premiere des deux Méthodes que je donnai au public en 1699 pour la réſolution générale des Queſtions indéterminées, & je ſerois obligé de me ſervir de cette Méthode ſi j'avois entrepris de faire connoître toute l'étenduë des principaux inconveniens de la Méthode dont il s'agit. Mais je me propoſe ſeulement de marquer la réalité de ces inconveniens, en quoi il m'a paru que l'Algebre la plus ordinaire pouvoit ſuffire, lorſqu'une des Inconnuës ne paſſe point le ſecond degré. Il y a quantité de Lieux où les Inconnuës ſont d'un degré plus élevé, qui peuvent être examinées à fond par la voie des Caſcades algébriques. Mais ce ne ſont auſſi que des cas particuliers, & il y a infiniment plus d'Exemples où il faut neceſſairement une Méthode auſſi générale que la Méthode des Indeterminées de l'année 1699. pour ſavoir ſi les lieux ſont réels ou imaginaires & en diſtinguer les eſpeces.

SECOND EXEMPLE.

La propoſée eſt l'Egalité E.

$E \ldots x^5 + a^3xx - 2a^3cx + a^3cc + a^3dd = 0.$

On a $x^3 = ayy$ pour le premier lieu, & la Méthode donne le ſecond lieu F.

$F \ldots xxyy + aaxx - 2aacx + aacc + aadd = 0.$

En

En dégageant x ou y, on pourra voir que ce ſecond lieu eſt tout à fait imaginaire, ſuivant ce qui a été dit dans le premier Exemple. On ne peut douter neanmoins que le premier lieu n'exprime une Courbe, ni que l'Egalité à conſtruire ne renferme du moins une racine réelle, quelque valeur que l'on veuille prendre pour *a. c. d.* puiſqu'elle eſt d'un degré impair. Il faut neanmoins excepter $d=0$, qui jette dans un autre écueil.

On peut remedier aux inconveniens que déſignent ces deux Exemples, en transformant ou le premier lieu, ou l'Egalité propoſée. Ce qui ne ſeroit pas aiſé ſi l'on vouloit regler generalement ces transformations.

Voici d'autres Exemples où les premiers lieux ſont d'un uſage ordinaire dans la Méthode en queſtion, & néanmoins cette Méthode ne laiſſe pas de donner de ſeconds lieux imaginaires & de ſeconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe. Mais l'on n'aura pas beſoin de transformations pour remedier aux inconveniens indiquez par ces Exemples.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, on ſe propoſe de trouver un ſecond lieu qui exprime un Cercle. On prend pour premier lieu le plus commode de tous les lieux qui peuvent ſervir à ce deſſein, & l'Egalité à conſtruire eſt auſſi du degré le plus avantageux pour cette recherche. Cependant le ſecond lieu que la Méthode fournit ſe trouve imaginaire, quoique revêtu des apparences d'un lieu au Cercle.

L'Egalité à conſtruire eſt l'Egalité *G*.

$G \ldots x^4 + aaax - a^3x + a^4 = 0.$

Le

Le premier lieu eſt la parabole ordinaire *H*.

$H \ldots xx - ay = 0$. ou $xx = ay$.

1°. Ne ſubſtituant la valeur de xx priſe de *H*, que dans le premier terme de la propoſée *G*, il en réſulte le ſecond lieu *I*.

$I \ldots yy + xx - ax + aa = 0$.

qui eſt figuré comme un lieu au Cercle. Mais comme ce lieu eſt fort ſimple, il eſt fort facile auſſi de s'aſſurer que toutes les Solutions dont il eſt capable ſont imaginaires, & que le Cercle qu'il promet n'a rien de réel. Ainſi, il ſeroit inutile d'en apporter les raiſons, après ce qui a été dit dans l'explication du premier Exemple.

2°. Si l'on ſubſtituë la valeur de xx dans les deux premiers termes de *G*, on aura le ſecond lieu *K*.

$K \ldots yy + ay - ax + aa = 0$.

Et combinant *affirmativement* ce lieu *K* avec le lieu *H*, il en réſultera le lieu imaginaire *I*. En ſorte que ſi l'on inſiſte à vouloir que le ſecond lieu ſoit un Cercle ; les moiens, ou vagues ou précis, que la Méthode fournit, ne donneront qu'un Cercle imaginaire. Encore un Exemple de cette eſpece.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple la Méthode ne permet pas de faire varier les ſubſtitutions dans la recherche du ſecond lieu. Celui qu'elle fournit fait eſperer un Cercle ou une Ellipſe. Mais ce Cercle & cette Ellipſe ſe trouvent imaginaires.

La propoſée eſt l'Egalité *L*.

$L \ldots x^6 + ba^3xx - 2a^4bx + ba^5 = 0$.

Le

Le premier lieu eſt $x^3 = aay$. Ainſi la ſubſtitution de aay à la place de x^3 ne ſe peut faire que dans le premier terme de *L*. Ce qui donne le ſecond lieu *M*.

$$M \ldots ayy + bxx - 2abx + haa = 0.$$

qui a les apparences d'un lieu à l'Ellipſe lorſque a eſt different de b, & celles d'un lieu au Cercle lorſque a eſt égal à b. Mais en l'examinant ſelon ce qui a été dit dans le premier Exemple, on verra aiſément qu'il n'a aucune ſolution réelle; non-ſeulement quand on prend pour a & pour b deux quantitez poſitives à volonté, mais auſſi lorſque l'une & l'autre eſt négative; de maniere que ce ſecond lieu *M* n'exprime ni Courbe ni ligne droite dans ces deux hypothêſes. Cependant le premier lieu eſt des mieux choiſis & d'un frequent uſage.

Si l'on prend encore $x^3 = aay$ pour conſtruire l'Egalité *N*.

$$N \ldots x^{12} - 14a^3x^9 + a^4x^8 + 2a^5x^7 + 49a^6x^6 - [86a^8x^4 + a^{10}xx + 1296a^{12} = 0.$$

Le ſecond lieu n'aura que trois ſolutions réelles; ainſi, il n'exprimera ni Courbe ni ligne droite. Comme cette difficulté tient à celle des lieux imaginaires, il faut l'expliquer ici, & prendre pour cela un Exemple plus ſimple que *N*.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Le ſecond lieu que fournit la Méthode dans cet Exemple eſt un lieu réel, mais d'une réalité qui n'exprime aucune Courbe ni même aucune ligne droite. Cependant le premier lieu eſt des mieux choiſis, & l'Egalité à conſtruire renferme des racines réelles.

L'E-

L'Egalité propoſée eſt celle qu'on voit en *O*,

$O \ldots x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^5 = 0.$

Pour la conſtruire on a le lieu *P*.

$P \ldots . x^3 = bby.$

Et la Méthode donne le ſecond lieu marqué *Q*.

$Q \ldots b^4yy - 4aabbxy - 8a^3bby + 8a^4xx + 32a^6 = 0.$

Ce lieu eſt réel, parce que $x = 2a$, & $y = \frac{8a^3}{bb}$ en ſont une ſolution, dont il eſt facile de s'aſſurer en y ſubſtituant ces valeurs. Mais il faut encore s'aſſurer qu'il n'en a point d'autres. Ce que l'on peut faire, comme on le va dire ici.

Dégageant x par la régle ordinaire du ſecond degré, on aura ſa valeur ſous la forme que l'on voit en *R*.

$$R \ldots x = \frac{bby + \sqrt{8a^3 - bby}\sqrt{-1}}{4aa}$$

Où il eſt évident 1°. Que le ſigne radical ne renferme aucune racine réelle, & que ſi ce ſigne ſubſiſtoit toûjours dans l'Egalité *R*, la valeur de x ſeroit toûjours imaginaire. 2°. Que le ſigne radical ne peut ſe détruire qu'en détruiſant ſon multiplicateur. 3°. Que ce multiplicateur eſt détruit en faiſant $8a^3 - bby = 0$. Mais alors, on a $y = \frac{8a^3}{bb}$, & comme cette valeur eſt la ſeule qui ſe peut tirer de cette Egalité $8a^3 - bby = 0$, c'eſt auſſi la ſeule qui peut en détruire tous les termes, & par conſéquent la ſeule encore qui peut détruire le ſigne radical de *R*. On a donc $y = \frac{8a^3}{bb}$ pour l'unique valeur de y qui convient à l'Egalité *R*, & il eſt évident que cette valeur étant ſubſtituée dans cette Ega-

Egalité donne $x=2a$. D'où il ſuit que l'Egalité R & par conſéquent l'Egalité Q, ont pour ſolution $x=2a$, $y=\frac{8a^3}{bb}$, & qu'elles n'en ont point d'autre. En quoi l'on peut obſerver que l'infinie varieté des valeurs dont b eſt capable, n'empêche pas que l'inconvenient ne ſubſiſte.

REMARQUE. Si du dernier terme de l'Egalité O on ôte une quantité poſitive auſſi petite qu'on voudra, le ſecond lieu exprimera une Courbe; & ſi au contraire on ajoûte à ce dernier terme une quantité poſitive telle qu'on voudra, le ſecond lieu ſera toûjours imaginaire, en prenant P pour le premier lieu.

On auroit un Exemple plus ſimple dont la propoſée eſt réelle, ſi l'on prenoit $x^4=yy$ pour conſtruire l'Egalité $x^5+xx-2x+1=0$. Alors le ſecond lieu n'auroit qu'une ſolution dans laquelle $x=1$. Mais on pourroit dire que le premier lieu n'eſt pas bien choiſi.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple ſe réunißent les deux conditions que l'on a deſirées dans le premier & le ſecond lieu. Cependant la Méthode conduit aux inconveniens indiquez par les précedens Exemples.

On a pour l'Egalité à conſtruire, celle qui eſt en S.

$S\ldots x^{16}-6a^8x^8+a^{14}xx-2a^{15}x+r=0$.

dans laquelle r exprime une quantité ou égale à $10a^{16}$ ou plus grande que $10a^{16}$, à volonté.

Le premier lieu eſt celui qui eſt en T.

$T\ldots x^4=a^3y$.

Et

Et la Méthode fournit le second lieu. *V.*

$V \ldots aaxx - 2a^3x + y^4 - 6aayy + r = 0.$

Lorsque $r = 10a^{16}$ dans la proposée *S*, le second lieu *V* se trouve réel, mais il n'exprime ni Courbe ni ligne droite ; parce qu'il n'a que deux solutions réelles. Et si l'on prend r pour une quantité plus grande que $10a^{16}$, comme $11a^{16}$, $20a^{16}$, &c. le second lieu sera toûjours imaginaire comme on le peut voir, en dégageant l'inconnuë x, & en rappellant les explications que j'ai données sur le premier Exemple & sur l'Exemple 5.

Lorsque les Egalitez sont du 16e dégré & que le premier lieu n'est point donné, non-seulement on a souhaité que ce premier lieu fût celui qui est en *T*, mais aussi que les inconnuës n'eussent pas plus de quatre dimensions dans le second lieu. Ce sont-là toutes les conditions que l'on a desirées dans les lieux pour la construction de ces Egalitez, & l'on voit dans ce 6e Exemple que ces conditions n'empêchent pas de tomber dans deux inconveniens considerables. Voici encore un Exemple sur cela, avec d'autres Remarques.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

La Proposée est l'Egalité *Z*.

$Z \ldots x^{16} - 6a^4x^{12} + a^6x^{10} + 2a^7x^9 + 9a^8x^8 - [8a^{11}x^5 + a^{14}xx + a^{16} = 0.$

Le premier lieu est *T* du 6e Exemple.

Et la Méthode donne ce second lieu Π.

$\Pi \ldots y^4 - 6ay^3 + xxyy + 2axyy + 9aayy - 8aaxy [+ aaxx + a^4 = 0.$

qui a les conditions que l'on y a desirées. Mais en dégageant x, on verra qu'il n'exprime ni Cour-

Courbe ni ligne droite. Car le dégagement donne Δ.

$$\Delta \ldots x = \frac{4aay - ayy + \overline{y^3 - 3ayy + a^3}\sqrt[2]{-1}}{yy + aa},$$

Et ſuivant le détail du 5e Exemple, les ſolutions de cette Egalité ſeront celles du Problême que l'on voit en Ω.

$$\Omega \ldots \begin{cases} x = \frac{4aay - ayy}{yy + aa}. \\ y^3 - 3ayy + a^3 = 0. \end{cases}$$

dont les trois ſolutions ſont réelles & incommenſurables. Ainſi, l'Egalité Δ & par conſéquent le lieu Π, auront ces trois ſolutions réelles & n'en auront point d'autres.

Remarque I. Si l'on remonte des concluſions aux prémiſſes & aux hypothêſes, ce retour fournira deux Régles pour trouver des Exemples autant qu'on voudra, ou la Méthode donnera de ſeconds lieux imaginaires, ou bien de ſeconds lieux réels qui n'exprimeront ni Courbe ni Ligne droite, à volonté.

La premiere Régle donnera le ſecond lieu; l'autre fournira le premier lieu & l'Egalité à conſtruire.

Régle pour le ſecond Lieu.

Aiant ſuppoſé la valeur de x comme on le voit ici en *A*.

$$A \ldots x = \frac{B + \overline{C}\sqrt[2n]{D}}{E}.$$

1°. On prendra pour *B* & pour *E* des quantitez connuës à volonté, ou bien des quantitez dont

dont y ſoit la ſeule inconnuë à laquelle on pourra donner autant de termes qu'on voudra & prendre pour leurs Coëfficiens des quantitez connuës telles qu'on voudra.

2°. On prendra pour n un nombre entier à volonté.

3°. Pour D, on prendra une quantité connuë & négative telle qu'on voudra. Ou bien la ſomme des termes d'une Egalité entierement imaginaire dont y ſoit la ſeule inconnuë, en obſervant de changer tous les ſignes de cette ſomme avant que de la ſubſtituer à la place de D.

4°. Cela poſé, ſi l'on prend pour C une quantité connuë à volonté, l'inconnuë x n'aura que des valeurs imaginaires.

En prenant pour C la ſomme des termes d'une Egalité dont y ſoit la ſeule inconnuë & dont tous les Coëfficiens ſoient des quantitez connuës à volonté; les valeurs de x ſeront tantôt réelles & tantôt imaginaires.

Toutes ces valeurs ſeront imaginaires, lorſque l'Egalité priſe pour C ſera entierement imaginaire.

Et ſi l'Egalité priſe pour C n'eſt pas imaginaire, l'Inconnuë x aura autant de valeurs réelles que cette Egalité renfermera de racines réelles.

Ainſi, l'Egalité A aura autant de ſolutions qu'il y aura de racines réelles dans l'Egalité que l'on prendra pour C, & comme il eſt libre de mettre dans cette derniere Egalité autant de racines qu'on voudra & telles qu'on voudra, on peut faire auſſi que l'Egalité A ait autant de ſolutions qu'on voudra, & même telles qu'on voudra; parce que les valeurs de B & de E ſont arbitraires.

5°. Aiant

5°. Aiant ainſi donné des valeurs à *B. C. D. E. n* de maniére que *y* s'y trouve au moins une fois, on fera évanouïr le ſigne radical; & l'Egalité qui en réſultera, ſera un lieu qui aura les mêmes ſolutions que l'Egalité *A* & qui n'en aura point d'autres.

A la place de x, *on pourroit mettre dans* A *une quantité algébrique où cette inconnuë & y auſſi, auroient autant de termes qu'on voudroit. Ce qui fourniroit une Régle beaucoup plus génerale que la précedente, & dans laquelle il y auroit peu d'exceptions. Une Régle bien plus génerale ſur cela ſans comparaiſon, ſeroit une Inverſe de la premiere Méthode que je donnai en* 1699 *pour la réſolution des queſtions indéterminées. Mais cette Inverſe ne pourroit pas être inſerée dans ce Memoire, & il ſuffit pour l'Inconvenient de la Méthode en queſtion que j'ai voulu marquer dans ce* 3e *article, de faire voir qu'elle fournit une infinité de ſeconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe & qu'elle donne chacun de ces lieux dans une infinité d'Exemples.*

Si $B = 2$. $E = 1$. $n = 1$. $D = -1$. $C = y - 1$.

La formule *A* donnera $x = 2 + \overline{y - 1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}$; & faiſant évanouïr le ſigne radical on aura le lieu *F*.

$$F \ldots xx + yy - 4x - 2y + 5 = 0.$$

qui eſt réel & qui promet un Cercle, mais il n'exprime ni cercle ni aucune ligne. Car $x = 2$, & $y = 1$ en eſt l'unique ſolution. On va voir dans la ſeconde Régle qu'il y a une infinité d'Exemples où la Méthode donne *F* pour le ſecond lieu, quoique le premier lieu ſoit des mieux choiſis & que les ſubſtitutions qu'elle preſcrit dans la recherche de ce ſecond lieu, ſoient

ſoient faites de la maniere la plus avantageuſe à cette Méthode.

Régle pour trouver le premier Lieu & l'Egalité à conſtruire, lorſque le ſecond Lieu eſt donné.

Un Lieu quelconque étant propoſé, on peut trouver autant d'Exemples qu'on voudra de la Méthode en queſtion; de maniére que le ſecond Lieu qu'elle fournira, dans tous ces Exemples, ſoit le même que le Lieu propoſé; & faire en même tems que le premier Lieu ſoit de ceux qui ſont les plus avantageux à cette Méthode. Voici la Régle.

1°. Aiant pris la Formule que l'on voit ici en *G* pour l'expreſſion des premiers Lieux,

$$G \ldots y = \frac{x^c + b a^{c-1}}{a^{c-1}}.$$

On fera, ou $b = 0$, ou b réel à volonté; lorſque le Lieu propoſé aura des monomes entierement connus; & toûjours b réel, lorſque ce Lieu n'aura aucun de ces monomes.

Pour c on prendra à volonté, un nombre entier & poſitif qui ſurpaſſe le plus haut degré de x du Lieu propoſé, & ſi les coëfficiens de ce Lieu ne ſont que de nombres, on peut prendre pour a un nombre tel qu'on voudra. Enſorte que ſi le Lieu propoſé étoit, par exemple, le Lieu *F* de la Régle précedente, dans lequel le nombre 2 déſigne le plus haut degré de x; il faudroit prendre pour c un nombre plus grand que 2, & pour a un nombre à volonté. Si l'on ſe détermine à $c = 3$. $a = 1$ & $b = 0$, la ſubſtitution

tion de ces valeurs dans G, donnera le premier Lieu H.

$H \ldots y = x^3$.

2°. Faisant évanouïr l'inconnuë y qui est commune au lieu proposé (F) & au lieu trouvé (H) leur réduite sera l'Egalité à construire. Ainsi, dans cet Exemple, cette Egalité sera celle qu'on voit en I.

$I \ldots x^6 - 2x^3 + xx - 4x + 5 = 0$.

En sorte que si l'on se propose de construire l'Egalité I en prenant pour le premier lieu celui qui est H, la Méthode donnera le second lieu F.

Et si l'on prend pour c un autre nombre entier à volonté au dessus de 3, on aura un autre premier lieu & une autre Egalité à construire. Ainsi, l'on peut trouver autant d'Exemples qu'on voudra où la Méthode donnera le lieu F. C'est à dire, un lieu qui est figuré comme un lieu au Cercle & qui n'exprime ni Courbe ni Ligne droite.

Si le second lieu proposé étoit, par exemple, $xx = py - yy$, on prendroit pour b une ligne réelle: à cause que ce lieu n'a point de monome entierement connu.

Quoique la premiere Régle soit des plus commodes pour trouver des lieux imaginaires & des lieux réels qui n'expriment ni Droite ni Courbe, elle ne donne pas toûjours neanmoins les lieux les plus simples de ces deux especes quand on veut que l'Inconnuë y se trouve en B. C. D. E. Et delà aussi l'Egalité à construire que fournit la seconde Régle, n'est pas aussi des plus simples. En voici un Exemple.

Aiant pris une Egalité imaginaire comme $yy - ry + rr = 0$ pour la valeur de D, suivant

la premiere Régle, on aura $D = -yy + ry - rr$.

Prenant auſſi une Egalité imaginaire pour C comme $yy + bb = 0$, quand on veut que le lieu qu'on cherche ſoit imaginaire, on aura $C = yy + bb$, ou bien $C = -yy - bb$. Car l'une & l'autre expreſſion convient au deſſein.

Et ſi pour E & B dont les valeurs ſont entierement arbitraires, on prend $E = yy$ avec $B = eey$, il ſe trouvera en faiſant $n = 1$ que la Formule A donne le lieu imaginaire.

$$x = \frac{eey + yy + bb\sqrt{-yy + ry - rr}}{yy}.$$

Délivrant ce lieu du ſigne radical, on l'aura ſous la forme K.

$$K \ldots y^6 - ry^5 + xxy^4 - 2eexy^3 + 2rrbbyy - rb^4y \left[\begin{array}{l} + rrb^4 \\ + 2bby^4 - 2rbby^3 + b^4yy \\ + rry^4 \qquad + e^4yy \end{array} \right.$$

Si l'on veut des Exemples où la Méthode donne ce lieu imaginaire pour le ſecond lieu d'une conſtruction, de maniere que le premier lieu ſoit de ceux qui ſont les plus avantageux à cette Méthode, on prendra pour c de la Formule G, un nombre plus grand que 2 ſuivant la ſeconde Régle, & pour b, ou 0 une ligne réelle à volonté, par la même Régle. Si $c = 2$, & $b = 0$, on aura $y = \frac{x^2}{aa}$ pour le premier lieu; Et ſubſtituant cette valeur de y dans K comme le preſcrit cette Régle, il en réſultera l'Egalité à conſtruire que l'on voit ici en L.

$$L \ldots x^{18} - raax^{15} + a^4x^{14} + rra^4x^{12} + 2bba^4x^{12} \left[\begin{array}{l} - 2eea^6x^{10} \\ - 2rbba^6x^9 + 2rrbba^8x^6 + b^4a^8x^6 + e^4a^8x^6 \\ - rb^4a^{10}x^3 + rrb^4a^{12} = 0. \end{array} \right.$$

Ainſi,

Ainſi, quand on ſe propoſera de conſtruire l'Egalité L par la Méthode en queſtion, cette Méthode donnera le ſecond lieu imaginaire K, lorſque le premier lieu ſera $x^3 = aay$. En cela, je ſuppoſe que dans la recherche du ſecond lieu, on pouſſe les ſubſtitutions juſques à ce que les inconnuës aient le moins de dimenſions qu'il eſt poſſible, comme on le pratique dans la Méthode. Si on ne le faiſoit pas, la difficulté de la Méthode ſeroit differente & ne ſeroit pas moins conſiderable.

Il ſuit de la premiere Régle, qu'il y a une infinité de lieux imaginaires avec une infinité de lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, & l'on voit par la ſeconde Régle qu'il y a auſſi une infinité d'Exemples où la Méthode donne chacun de ces lieux pour la conſtruction de l'Egalité propoſée; c'eſt à dire, que la premiere Régle fournit une infinité d'Exemples, qui étant pris un à un, chacun donne par la ſeconde Régle une infinité d'autres Exemples où la Méthode fournit un ſecond lieu imaginaire, ou un lieu réel qui ne renferme ni Courbe ni Ligne droite. Ce qui marque une exception conſiderable de cette Méthode.

Cependant la premiere Régle ne donne pas à beaucoup près tous les lieux de ces deux ſortes. Par exemple, le lieu que l'on voit ici en M

$$M.. \left\{ \begin{array}{l} y^6 - 4aay^4 + 2a^3y^3 + 6a^4yy \\ -4a^5y + a^6 + 2x^6 - 12aax^4 \\ +4aayx^3 + 18a^4xx - 12a^4yx \end{array} \right\} = 0$$

eſt un lieu qui n'a que neuf ſolutions réelles, & que cette Régle ne le donne pas.

Il y a infiniment plus de ces lieux imparfaits

qui ne peuvent ni se former ni s'expliquer par les Régles particulieres, que de ceux qui peuvent s'en déduire. La Formule N en donne encore une idée.

$N \ldots x^{2m} - x^{2r+1} + y^{2b} - y^{2t+1} + 4 = 0.$

Car si l'on prend $m = 3$. $r = 0$. $b = 3$. $t = 0$, on aura le lieu imaginaire O.

$O \ldots x^6 - x + y^6 - y + 4 = 0.$

Et prenant à volonté des nombres plus grands que 3 pour m & b, avec un nombre plus petit que m, pour r; & un nombre plus petit que b, pour t; tous les lieux qui en résulteront se trouveront inexplicables par les Régles particulieres de l'Algebre. Mais l'on pourra en faire l'analyse & s'assurer qu'ils n'ont aucune solution réelle en y appliquant la Méthode & la Theorie des Cascades algébriques.

Il y a une infinité d'autres lieux de differens ordres où cette Méthode & cette Theorie ne suffiroient pas, & où il faudroit encore la Méthode des questions indéterminées que je donnai en 1699 avec une nouvelle Theorie, pour prouver que ces lieux sont, ou imaginaires, ou de ceux qui sont réels & qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite.

Il paroît de ce détail, que l'Exception de la Méthode qui a pour mesure l'immense étenduë des Formules A & G, est engloutie dans une autre exception infiniment plus vaste dont ces Formules & les Exemples N. O ne sont que de foibles indices.

REMARQUE II. On verra d'autres inconveniens de la Méthode dans l'usage qu'elle fait des lieux les mieux choisis, si l'on prend les paraboles $xx = ay$, $x^3 = bby$. $x^4 = acny$. pour con-

conſtruire les Egalitez marquées G, H, I, dans mon premier Memoire page 442, ſelon ce que j'en ai dit dans la page 445. On y verra qu'en ne diviſant point l'Egalité à conſtruire, une partie de ſes racines ne ſe trouveroient pas dans l'effection géometrique ſi l'on conſtruiſoit les lieux comme on le fait ordinairement, & que leur Réduite ſeroit eſſentiellement differente de la Propoſée, ſi l'on ſuivoit les Régles ordinaires de l'évanouïſſement des Inconnuës. Il eſt facile de remedier à cet inconvenient quand il eſt ſeul; mais il n'eſt pas aiſé de remedier à la plûpart des autres inconveniens de la Méthode que nous avons marquez ici & dans le premier Memoire. Cependant il ne ſeroit pas bien difficile de reformer la Méthode dans le cas où le premier lieu eſt arbitraire, & même l'on pourroit éviter en cela les inconveniens du 3e Article. Car une des Inconnuës aura toûjours des valeurs de toutes les grandeurs dans un lieu, lorſque le plus haut degré de l'autre inconnuë y ſera exprimé par un nombre impair, & une Egalité n'a jamais de racines égales quand elle n'a point de Diviſeurs. De plus, le premier lieu étant pris dans la Formule G de la premiere Remarque, l'Egalité propoſée eſt toûjours imaginaire lorſque le ſecond lieu eſt imaginaire; & ſi, dans la même hypothêſe le ſecond lieu eſt un de ces lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, les racines de l'Egalité propoſée ſe trouveront parmi les Solutions réelles de ce lieu: Ou bien, cette Egalité ſera imaginaire. Ainſi, l'on pourra réformer la Méthode ſur cette idée, lorſque le premier lieu eſt arbitraire.

On pourra voir auſſi que cela abrege la Méthode,

thode; ſi l'on conſidere que dans le cas où le ſecond lieu exprime une Courbe ou une Ligne droite, il faut plus de calcul pour s'en aſſurer que pour ſavoir dans les autres cas que ce lieu n'exprime aucune ligne, toutes choſes d'ailleurs étant ſemblables; & l'on a encore l'avantage dans ces derniers cas de n'avoir point de Courbe à conſtruire: puiſque le ſecond lieu n'en donne aucune, & que la queſtion eſt alors réſoluë ſans former la Courbe du premier lieu.

On peut encore conſiderablement abreger la Méthode, lorſque les diviſeurs du ſecond lieu jettent dans l'inconvenient dont j'ai parlé ci-deſſus. Car ce qui caracteriſe ces diviſeurs, fournit une Régle ſimple & préciſe pour les trouver; & de-là une autre Régle pour trouver les diviſeurs de l'Egalité à conſtruire. Ce qui efface l'inconvenient & réduit cette Egalité à d'autres Egalitez beaucoup plus ſimples. A quoi il faut ajoûter que ces reformes ne font aucun obſtacle à la recherche des lieux les plus ſimples, dans la ſuppoſition que le premier lieu eſt arbitraire; de maniere que ſur cette hypothêſe la Méthode en queſtion ſe trouvera toûjours vraie dans ſes effets, capable d'une ſolide démonſtration, & plus commode qu'avant ſa réforme. Mais il faut encore donner un Memoire ſur les inconveniens qui n'ont pas été aſſez expliquez avant que de regler les additions qu'il faut faire à cette Méthode. Quant à l'inconvenient des Courbes qui ſe coupent à Tangentes égales, quoiqu'on l'évite par les voies que je propoſe ici; je ne prétens pas que ces voies conviennent tout à fait à des Méthodes que l'on a données ſur d'autres ſujets, dans leſquelles il arrive auſſi que des Courbes ſe coupent quelque-

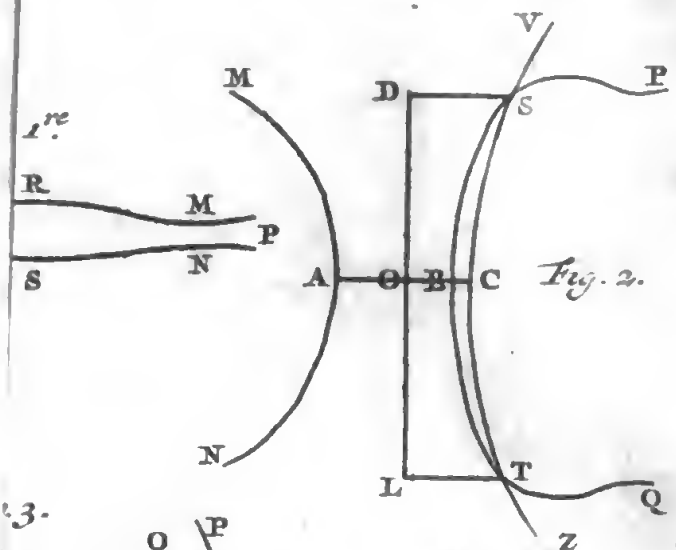


Fig. 2.

3.

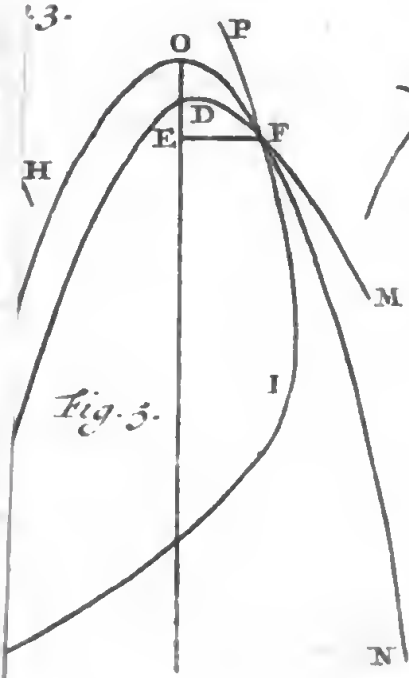


Fig. 3.

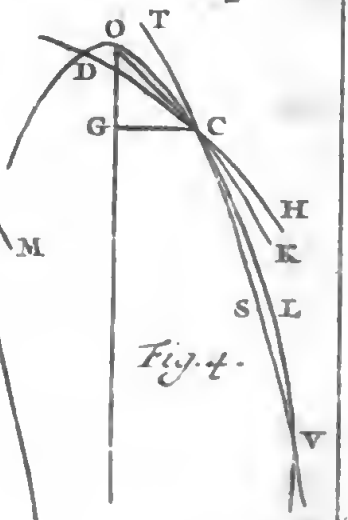


Fig. 4.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

quefois à T'angentes égales. Comme les difficultez de ces Méthodes, indiquées par cet Inconvenient, ſont differentes de celles que j'ai expliquées ici, il faut un autre détail pour les réſoudre.

PROBLEME DE STATIQUE.

PAR M. VARIGNON.

* CE Problême me fut propoſé il y a quelques jours : voici la Solution que j'en trouvai preſqu'auſſi tôt par le moien d'une Courbe des plus aiſées à décrire.

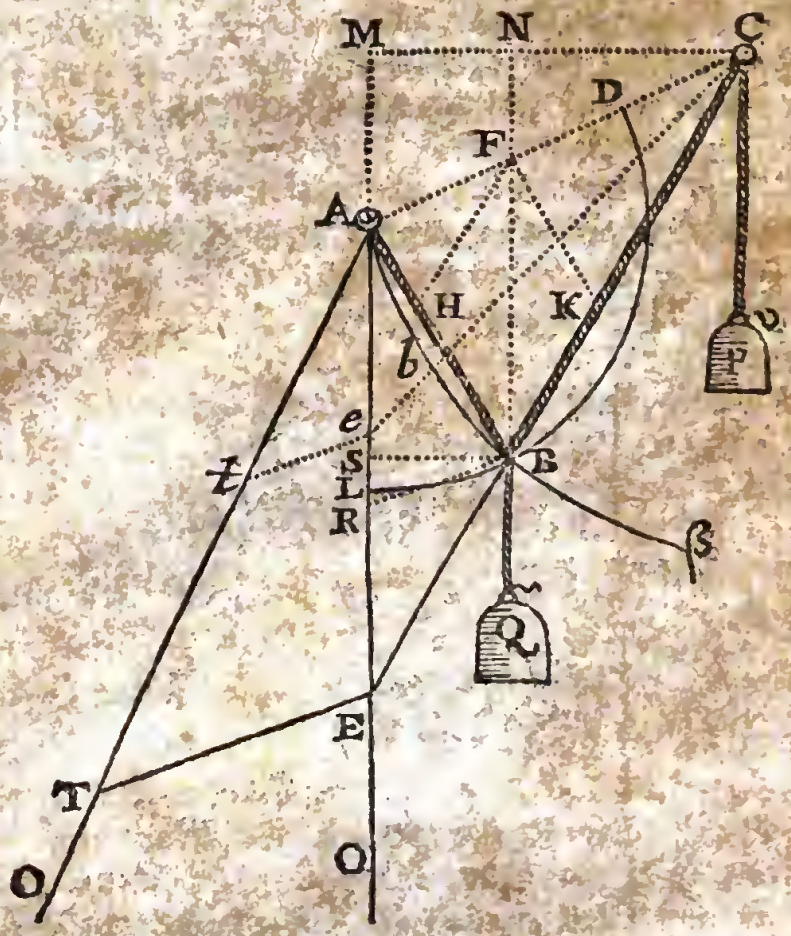
PROBLÊME.

Deux Poids donnez P, Q, *étant attachez à une corde* ABCP, *qui retenuë par une de ſes extremitez au clou* A, *paſſe librement par deſſus une poulie* C *fixe entre ces poids : On demande en quel point* B, *ou en quelle ſituation* ABC *de la corde ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

Après avoir mené la droite *AC* avec la verticale *AED*, d'un des points quelconque *E*, de laquelle ſoit en angle auſſi quelconque la droi-

* 28. Août 1709.



te *ET*. *AE* :: *P*. *Q*. Soit par les points *A*, *T*, la droite *ATO* rencontrée en une infinité d'autres points *t*, par une infinité de droites *et* parralleles à *ET*, & qui rencontrent auſſi la verticale *AEO* en une infinité de points *e*, *E*, par leſquels du point *C* ſoient autant d'autres droites *Ce*, *CE*. Si l'on prend par tout ſur elles depuis *AEO* les portions $eb = et$, $EB = ET$, la Courbe *AbBβ* qui paſſera par tous les points *b*, *B*, ainſi trouvez, déterminera par ſa rencontre avec l'arc de cercle *DBL* décrit du centre *A* & du raion donné *AB*, le point *B* auquel

le

le poids Q demeurera en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit trouver.*

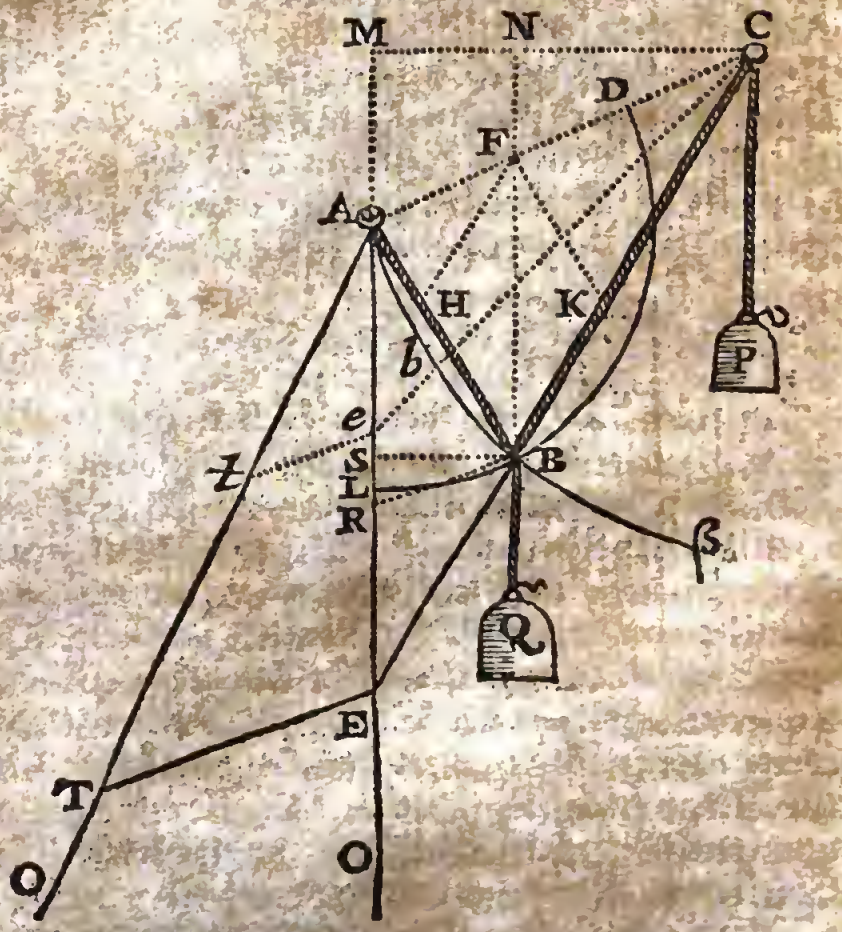
DÉMONSTRATION.

Soit le parallelogramme HK dont la diagonale BF soit sur la verticale QB prolongée vers F; & les côtez BH, BK, sur les portions AB, BC, de la corde $ABCP$. La ressemblance des triangles rectilignes FKB, ABE, donnera $BK.BF::BE.EA$ (*constr.*)$::ET.EA$ (*hyp.*)$::P.Q$. c'est à dire, $BK.BF::P.Q$. Donc suivant le *Projet d'une nouvelle Méchanique* (prop. des poids soûtenus avec des cordes) le poids Q demeurera ici en équilibre en B avec le poids P. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Le raion AB du cercle DBL étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il soit, le point B de suspension du poids Q en équilibre avec le poids P, se trouvera toûjours sur la Courbe $AbB\beta$. Ainsi *si ce poids* Q, *au lieu d'être attaché en* B *à la corde* ABCP, *eût été proposé coulant le long de cette corde entre le crochet* A *& la poulie* C, *& qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arrêter en équilibre avec le poids* P: cette question auroit été résoluë par le moien de la Courbe $AbB\beta$ faite comme ci-dessus, en répondant que ce poids Q auroit pû demeurer ainsi en équilibre avec le poids P dans tout ce que la longueur de la corde $ABCP$ lui peut permettre de points B qui puissent atteindre à cette Courbe $AbB\beta$, & qu'il y seroit en effet

demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette Courbe ; puiſque par la conſtruction de cette même Courbe $AbB\beta$, ce poids Q y auroit été par tout au poids $P :: BF . BK$. Et conſéquemment auſſi en équilibre partout là avec le poids P ſuivant la propoſition qu'on vient de citer du *Projet d'une nouvelle Méchanique*. D'où l'on voit que ce même poids Q



peut ainſi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde $ABCP$ ainſi repliée juſqu'à la Courbe $AbB\beta$:

AbBβ: de sorte que cette Courbe est le lieu de tous ces points *B* d'équilibre.

SCHOLIE.

I. Pour trouver l'équation de la Courbe *AbBβ*, soit *F* le point où la droite *AC* est rencontrée par la verticale *QB* prolongée jusqu'à elle. Soient appellées *AC*, *a*; *CF*, *x*; *FB*, *y*; *P*, *p*; *Q*, *q*. L'on aura $CF(x).FB(y)::CA(a).AE=\frac{ay}{x}$. Et par la nature ou construction (*Solut.*) de la Courbe *AbBβ*, l'on aura aussi $Q(q).P(p)::AE.ET(constr.)::AE\left(\frac{ay}{x}\right).EB=\frac{apy}{qx}$. Soit *BR* parallele à *CA*, & conséquemment $BR=FA=a-x$: l'on aura de plus $BR(a-x).BE\left(\frac{apy}{qx}\right)::CA(a).CE=\frac{aapy}{qx\times a-x}$. Et conséquemment $\overline{CE}^2=\frac{a^4ppyy}{qqxx\times\overline{a-x}^2}$.

Pour trouver encore une autre valeur de $\overline{CE}^2$, soit l'horizontale *CM* qui rencontre en *M* la verticale *OEA* prolongée jusqu'à elle. L'angle *M* étant ainsi droit, & l'angle *CAE* ou *CAM* étant donné aussi-bien que l'hypothenuse *CA* du Triangle rectangle *AMC*, son troisiéme angle sera aussi donné avec ses deux autres côtez *CM*, *MA*. Donc en appellant *CM*, *b*; *MA*, *c*; aiant alors $ME=MA+AE=c+\frac{ay}{x}=\frac{cx+ay}{x}$, l'on aura pareillement ici $\overline{CE}^2)\overline{CM}^2+\overline{ME}^2)=bb+\frac{ccxx+2acxy+aayy}{xx}$

$= \frac{bbxx + ccxx + 2acxy + aayy}{xx}$ (à cauſe de $aa = \overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MA}^2 = bb + cc$) $= \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}$.

Donc $\frac{a^4ppyy}{qqxx \times a - x} = \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}$, ou $a^3ppyy = axx + ayy + 2cxy \times qq \times \overline{a - x}$ eſt l'équation cherchée de la Courbe $AbB\beta$.

II. Voici encore une autre équation de la même Courbe $AbB\beta$. Pour la trouver ſoit BF prolongée juſqu'à la rencontre de CM en N: & après avoir appellé CN, u; BN, z; l'on aura $CN(u).BN(z)::CM(b).ME = \frac{bz}{u}$. Et conſéquemment $AE = \frac{bz}{u} - c = \frac{bz - cu}{u}$. Mais la Solution donne $q.p::AE\left(\frac{bz - cu}{u}\right).EB = \frac{bpz - cpu}{qu}$. Et en menant BS parallele à CM, l'on aura auſſi $SB(b - u).BE\left(\frac{bpz - cpu}{qu}\right)::CM(b).CE = \frac{bbpz - bcpu}{qu \times b - u}$. De plus $CE(\sqrt{\overline{ME}^2 + \overline{CM}^2}) = \sqrt{\frac{bbzz}{uu} + bb} = \frac{b}{u}\sqrt{zz + uu}$. Donc $\frac{b}{u}\sqrt{zz + uu} = \frac{bbpz - bcpu}{qu \times b - u}$, ou $\sqrt{zz + uu} = \frac{bpz - cpu}{q \times b - u}$ ſera encore l'équation de la Courbe $AbB\beta$ ſur l'axe CM au lieu du diametre CA.

L'accord de ces deux équations (art. 1. 2.) *eſt aiſé à découvrir.*

OB-

OBSERVATIONS

Touchant l'effet de certains Acides sur les Alcalis volatils.

PAR M. HOMBERG.

* LEs Alcalis volatils, soit des Plantes ou des Animaux, ne font pas indifféremment des effervescences & des ébullitions avec toutes sortes d'acides ; il faut que leurs forces soient proportionnées entr'eux pour produire ces effets ; & quand elles ne le sont pas, ils se mêlent tranquillement dans une même liqueur, se confondent & demeurent ensemble sans se pénetrer en aucune façon. On en peut voir un exemple dans la confusion du vinaigre distillé & de l'esprit d'urine, qui ne font nul effet l'un sur l'autre, à moins qu'on n'affoiblisse beaucoup l'esprit d'urine, ou que l'on ne verse une grande quantité de vinaigre distillé dessus, & en ce cas l'ébullition ne commence à se faire qu'au moment qu'on en a versé assez pour que la proportion requise s'y trouve, & alors l'ébullition se fait tout à coup, comme s'il n'y avoit que les seules dernieres goutes du vinaigre qui eussent produit cette ébullition, sans que la grande quantité qu'on en avoit mis auparavant y eût contribué.

Nous en voions un exemple pareil dans la liqueur rousse qui distille de toutes les plantes immédiatement avant que l'huile fétide commen-

* 31. Août 1709.

mence à paroître, cette liqueur donne en même temps des marques d'alcali en faisant ébullition avec l'esprit de sel, & des marques d'acide en rougissant la teinture de Tournesol, c'est à dire, que l'acide & l'alcali nagent séparement dans cette liqueur sans se pénetrer; & ils restent en cet état pendant fort long-temps. J'ai examiné une pareille liqueur, il y avoit plus de quatre ans qu'elle avoit été faite, je l'ai trouvée semblable à celle qui venoit d'être fraîchement distillée.

Tout ceci n'arrive que dans les mélanges des alcalis volatils avec les acides distillez des vegetaux, & non pas avec les acides distillez des mineraux; car si dans l'esprit d'urine, quelque fort ou quelque foible qu'il soit, on verse une goute d'esprit de sel ou semblable, il se fait sur le champ une ébullition à proportion de la quantité d'esprit de sel qu'on y aura mis, qui se continuë à mesure qu'on en met davantage, jusques à ce que toutes les parties de l'alcali soient rassasiées d'acide; ce qui arrive de même dans la liqueur rousse distillée des plantes, c'est-à-dire, que l'acide mineral qu'on y mêle se joint dans le moment & avec ébullition à l'alcali volatile qui se trouve dans cette liqueur, pendant que l'acide vegetal, naturellement contenu dans la même liqueur, n'étoit pas capable de le faire, non plus que le vinaigre distillé en petite quantité dans l'observation précedente.

Pour donner la raison de cette difference selon l'idée que je m'en suis faite, je supposerois 1°. que les sels qui entrent dans les plantes sont les sels mineraux, tels que les racines des plantes les rencontrent dans la terre.

2°. Que les pointes acides de ces sels y sont com-

comme par paquets, c'eſt à dire, que pluſieurs de ces pointes ſont couchées les unes ſur les autres, & ſont attachées enſemble de la même maniere que nous obſervons la ſtructure de tous les corps qui ſont naturellement aiguillez, comme ſont l'antimoine, la ferrette d'*Eſpagne*, l'amianthe ſolide & qui ne s'eſt pas encore ſéparée en filaſſe, la pierre hematite & ſemblables.

3°. Que les pointes ſimples ou les aiguilles qui compoſent ces paquets ſe peuvent ſéparer les unes des autres ſans ſe corrompre, comme nous l'obſervons encore dans la plûpart de ces mêmes corps aiguillez que nous venons de rapporter.

4°. Que les pointes ſimples ont moins de maſſes, & qu'elles ſont plus deliées & moins roides que les paquets, qui ſont compoſez de pluſieurs de ces ſimples; & par conſéquent que les compoſez ſont capables d'un plus grand effort que les ſimples, & de ſoulever des poids que les ſimples ne ſont pas capables de ſoulever.

5°. Que ces paquets de ſels mineraux aiant été ſuccez par les racines dans les plantes, s'y mêlent avec les matieres ſulfureuſes des vegetaux, qui paſſant enſemble par les filieres fort étroites des organes des plantes, ſe penetrent intimement les uns les autres, y ſouffrent des fermentations, & ſe ſubdiviſent; de ſorte qu'ils ſe réſolvent ou ſe dégagent en aiguilles ſimples, c'eſt à dire, que les ſels acides roides, peſans & multiples des mineraux deviennent par les filtrations & par les differentes fermentations dans les plantes, des acides ſimples, déliez, plians & legers des vegetaux.

6°. Que

6°. Que l'alcali volatile, ou le sel d'urine est une matiere spongieuse & capable de compression ; & qu'ainsi plus il y en a de dissous dans une petite quantité de liqueur aqueuse, plus la masse de ce sel est comprimée & pese sur lui-même, & plus il est par conséquent difficile à être penetré par les pointes des acides qui se présentent pour entrer dans ses pores ; & qu'au contraire étant dissous dans une suffisante quantité d'eau, ses pores sont dans leur état naturel, c'est à dire, ouverts autant qu'ils le peuvent être, & par conséquent faciles à être pénetrez par les acides.

7°. Que toutes les actions des acides sur les alcalis & semblables, ne se font que parce qu'ils sont pouſſez les uns dans les autres par la matiere de la lumiere, que j'ai prouvé ailleurs être toûjours en mouvement, & heurter contre les parties solides de tous les corps, c'est à dire, les pousser continuellement.

Toutes ces suppositions étant accordées, j'en ferois l'application au fait dont il s'agit en cette façon : les acides distillez des vegetaux consistant en pointes simples, legeres & fort deliées, presenteront peu de masses à la matiere de la lumiere qui les pousse, & qui par conséquent ne leur imprimera qu'un très-petit effort sur l'alcali volatile, puisque les efforts ne sont qu'à proportion des masses ; & comme ces pointes si déliées ont peu de fermeté, elles plieront & elles glisseront plûtôt de dessus la masse pesante & comprimée du sel d'urine qui nage dans peu de liqueur aqueuse ; que d'en soulever les parties & de s'introduire dans ses pores, pour faire l'effervescence & l'ébullition, que la pénetration des acides dans les alcalis pro-

produit ordinairement ; mais quand le sel volatile d'urine a été delayé dans une grande quantité de liqueur aqueuse, ses parties sont écartées les unes des autres, & n'étant pas entassées dans un petit espace, ses pores ne sont pas comprimez, mais se tiennent ouverts, & pour lors le petit effort, dont les pointes legeres & pliantes des acides des vegetaux sont capables, suffira pour les introduire sans aucune résistance dans ses pores, & elles produiront l'effervescence & l'ébullition, comme nous le voions par l'experience.

Et comme nous avons supposé les pointes acides dans les mineraux couchées les unes sur les autres attachées ensemble par paquets, la masse de ces paquets sera d'autant plus multipliée, qu'il y aura de pointes simples rassemblées dans chaque paquet ; & par conséquent aussi l'effort qu'ils recevront de la matiere de la lumiere, sera d'autant plus grand ; ces pointes ramassées en paquets étant plus fermes que les pointes simples, elles releveront aisément le poids des alcalis volatils entassez dans peu de liqueur aqueuse, & s'introduiront de même dans leurs pores sans se plier ou glisser dessus, & produiront l'effervescence & l'ébullition, sans que l'alcali volatile ait besoin d'être délayé dans une plus grande quantité d'eau, ce que les pointes simples des acides des vegetaux n'étoient pas capables de faire, comme l'experience le démontre.

Nous avons vû dans les faits que nous venons de rapporter, que les acides distillez des mineraux, agissent plus promptement & avec plus de vigueur, que ceux des vegetaux sur les alcalis volatils distillez, en quelque degré de for-

forces qu'ils les rencontrent ; cependant ils ne laiſſent pas de pénetrer fort difficilement dans les pores de ces mêmes alcalis volatils qui n'ont pas été diſtillez, & qui ſont encore enchaſſez dans les parties animales ou vegetales qui les contiennent naturellement. J'ai vû l'eſprit de nitre produire une ébullition très-ſenſible avec les mouches cantharides, & la continuer pendant plus de deux ans. Voici l'occaſion qui me l'a fait obſerver.

J'ai vû emploier avec ſuccès dans les maux des reins & dans la gravelle une certaine préparation des mouches cantharides, que l'on appelloit le *Lithontripticum Tulpii* ; on en faiſoit un ſecret. J'en eus la préparation que voici : Prenez une dragme de cantharides ſans les ailes, & une dragme de la petite Cardamome ſans les coques. Palveriſez-les, & verſez deſſus une once d'eſprit de vin rectifié, & demi-once d'eſprit de nitre : laiſſez-les en infuſion froide pendant cinq ou ſix jours, en les remuant de tems en tems. Il ne faut pas boucher exactement la fiole ; car elle ſe caſſeroit par la fermentation continuelle qui s'y fait ; on en prend depuis quatre juſques à quinze ou vingt goutes dans un verre d'eau & de vin, le matin une heure après avoir pris un bouillon, & l'on continuë d'en prendre trois ou quatre jours de ſuite.

Cette liqueur a travaillé toûjours pendant plus de deux ans, & ne s'eſt jamais clarifiée parfaitement, même après l'avoir ſéparée par inclination de deſſus ſes feces ; le ſel d'urine ou l'alcali volatile qui ſe trouve dans les cantharides, eſt ſelon toutes les apparences, ſi fort enveloppé de matieres huileuſes & des autres parties.

ties de cet animal, que l'acide quoique mineral ne l'a pû atteindre que peu à peu, & pendant tout ce tems une ébullition douce se faisant continuellement, la partie la plus volatile de cette liqueur se rarefie en vapeurs, comme il arrive toûjours en pareil cas; ces vapeurs étant enfermées dans la fiole & occupant plus de place qu'elles ne font dans leur premiere forme de liqueur, auroient brisé la fiole si on l'avoit bouchée exactement. Aussi l'ai-je trouvé débouchée plusieurs fois, & le bouchon de liege sauté fort loin, quand par mégarde je l'avois enfoncé un peu trop. Il m'est arrivé à peu près la même chose avec la cochenille & avec la chair séche des viperes, apparemment par les mêmes raisons; mais les substances liquides animales comme l'urine, la serosité du sang, la liqueur contenuë dans la bourse du fiel, &c. ne produisent pas des effets semblables; au contraire les ébullitions s'y font avec les mêmes acides très-promptement & ne durent pas, apparemment parce que le sel volatile contenu dans ces liqueurs y est à nud, & non enveloppé de matieres huileuses ou d'autres parties de l'animal, qui par conséquent doit être touché tout aussi-tôt, & pénetré par les acides mineraux; & même il paroît que dans ces cas il n'est pas toûjours besoin que les acides soient distillez, pour produire des ébullitions & des effervescences, & qu'il suffit quelquefois d'emploier seulement les sels mineraux tels qu'ils se trouvent en les tirant de leurs mines, comme nous le verrons par les Observations suivantes.

Prenez une livre de fiel de bœuf, mêlez-y demi-once d'alun en poudre, battez-les un peu ensemble, il se fera sur le champ une ébullition

tion très-considerable avec effervescence, & toute la liqueur deviendra trouble comme de la bouë épaisse, à peu près de la même couleur qu'étoit le fiel de bœuf avant que d'avoir été précipité par l'alun, c'est à dire, d'un vert tirant sur le jaune; mais le précipité se jettant peu à peu au fond du vaisseau, la liqueur se clarifie au Soleil, & change sa premiere couleur en un rouge tirant sur le gris de lin, laissez reposer le tout pendant cinq ou six jours, & separez en les saletez qui surnagent & la résidence épaisse du fond; remettez cette liqueur claire au Soleil pendant trois ou quatre mois dans une fiole bien bouchée, il se fera encore quelque sediment au fond du vaisseau, & il s'amassera peu à peu sur la surface de la liqueur une graisse fort blanche & fort dure de la grosseur environ d'une grosse noix, & la couleur rouge de la liqueur se changera en un jaune fort foible couleur de citron, & elle acquerera une odeur semblable à celle des écrevisses cuites.

Il se fait dans cette derniere operation une précipitation fort ample, que nous n'avons pas observé dans les experiences précedentes, apparemment par la raison que l'alcali volatile du fiel de bœuf, aiant absorbé l'acide de l'alun, sa matiere terreuse a perdu son dissolvant, & elle a reparu dans sa premiere forme terreuse, & s'est précipitée au fond de la liqueur; mais comme ce précipité surpasse de beaucoup la quantité de l'alun qu'on y avoit mis, il faut que le fiel de bœuf y ait contribué une partie; nous voions arriver préciſement la même chose dans la préparation des laques des Peintres, qui ne sont autre chose que des extractions des teintures de la cochenille, de certains

bois,

bois, ou des fleurs des plantes par le moien de quelque alcali fixe, & précipitez enſuite par l'alun, dont la maſſe eſt toûjours plus peſante que l'alun qui l'a précipité.

L'on obſerve dans cette derniere operation un fait remarquable, qui eſt que dans la liqueur rouge & clarifiée du fiel de bœuf, il ſe trouve une quantité fort ſenſible d'une graiſſe blanche & dure comme du ſuif de mouton, & que cette liqueur étant expoſée au Soleil, perd ſa rougeur peu à peu, à meſure que la graiſſe s'en ſépare; & quand elle en eſt toute ſéparée, la liqueur a perdu auſſi toute ſa couleur rouge; cette obſervation confirme l'idée que l'on avoit de la liqueur contenuë dans la bourſe du fiel, ſavoir, que c'eſt une eſpece de ſavon liquide. Il eſt conſtant que le ſavon dans ce païs-ci n'eſt autre choſe que de l'huile d'olives unie par la cuiſſon au ſel de la ſoude; & dans les païs froids, où le ſel de la ſoude & l'huile d'olives ſont fort chers, l'on ſubſtituë à la place de l'un le ſel lixiviel du bois de chêne, & à la place de l'autre le ſuif des animaux, qui produiſent un ſavon auſſi blanc, auſſi dur & auſſi bon pour le blanchiſſage que celui qui eſt fait avec l'huile d'olives. Dans la liqueur du fiel la nature a emploié une graiſſe ſemblable au ſuif, qui dans cette operation s'en ſépare peu à peu, & qui reprend la même forme que nous obſervons dans la graiſſe des animaux; mais au lieu d'un alcali fixe que nous emploions dans la fabrique de nos ſavons factices, elle s'eſt ſervie de l'alcali volatile, dont toutes les parties animales ſont remplies: cet alcali aiant été détruit dans nôtre operation par l'acide de l'alun, la liqueur du fiel a rendu la graiſſe qu'elle contenoit, de

la

la même maniere que dans nos savons factices les alcalis fixes se détruisent par l'addition de quelque acide, & font reparoître l'huile ou la graisse qui étoit entrée dans sa composition.

Nous avons observé que la liqueur du fiel de bœuf est rouge après sa premiere précipitation, & qu'elle perd sa couleur à mesure que la graisse s'en sépare; la raison en est, que presque toutes les dissolutions des matieres huileuses ou grasses sont rouges, en quelque menstruë qu'elles soient dissoutes, & que celle-ci étant une de ces dissolutions, elle en conserve la couleur tant qu'elle contient de la graisse, laquelle en étant séparée, la couleur s'est perduë aussi qui en avoit été produite.

Notre fiel de bœuf aiant été dégagé de sa partie terreuse & grasse, de la maniere que nous l'avons enseigné dans cette derniere operation, devient un des meilleurs remedes que nous aions, pour ôter commodement les tannes qui paroissent dans la peau, & particulierement au nez de la plûpart des hommes, & qui sont d'autant plus sensibles que la peau est blanche & délicate. Il faut l'emploier de cette façon:

Prenez une dragme & demie de cette liqueur, après qu'elle aura été au moins deux ou trois mois exposée au Soleil en été, & autant d'huile de tartre par défaillance; ajoûtez y une once d'eau de riviere, mêlez bien ensemble, & gardez dans une fiole bien bouchée; il ne faut pas faire beaucoup de ce mêlange à la fois, parce qu'il ne se conserve pas long-tems. Pour s'en servir l'on mouille un doigt dans ce mêlange, on en tappe l'endroit où sont les tannes, on le laisse sécher & on en remet; l'on fait cela sept ou huit fois par jour, jusques à ce que l'endroit, étant

étant ſec, commence à devenir rouge, alors on ceſſe d'en mettre; on ſentira une très-legere cuiſſon, ou plûtôt une eſpece de chatouillement, & la peau ſe fera un peu farineuſe pendant un jour ou deux; la farine étant tombée les tannes ſeront effacées pendant cinq ou ſix mois de tems, après quoi il faudra recommencer le même remede: Si après la premiere application du remede, c'eſt à dire la farine étant tombée, les tannes n'étoient pas tout à fait effacées, il en faudroit appliquer deux fois de ſuite.

Les tannes m'ont toûjours paru n'être autre choſe que la matiere terreuſe, huileuſe & ſaline de la ſueur, laquelle reſte dans les mailles de la peau, tandis que la liqueur aqueuſe, qui leur ſervoit de vehicule, s'en évapore par la chaleur du corps, ces matieres rempliſſent peu à peu ces mailles; de ſorte qu'il en regorge toûjours une partie par les petits trous ou par les pores que ces mailles ont dans la ſurpeau; & comme cette matiere eſt tenace & gluante, elle retient la craſſe & la poudre qui vole ſur le viſage, & quoiqu'on l'eſſuie ſouvent, non-ſeulement on n'emporte pas la craſſe, qui s'eſt placée ſur les extremitez des tannes, qui ſont dans les enfonçures de ces trous; mais au contraire le linge qui eſſuie le viſage, la ramaſſe & la preſſe dans ces creux, où elle reſte & produit ces petits points noirs, qui paroiſſent dans les pores de preſque tous les nez, & qui fait le petit bout noir de la tanne quand on la fait ſortir de ſon trou, en la pinçant d'une certaine façon; ce qui a fait croire aux perſonnes peu inſtruites, que les tannes ſont des vers qui s'engendrent dans la peau, & que ce petit point en eſt la tê-

te, au lieu que c'eſt un petit peloton de la ſueur deſſéchée dans les pores de la peau, dont la petite extremité qui regarde le jour eſt ſale & craſſeuſe par la poudre qui journellement vole deſſus, & en eſt retenuë par la matiere gluante de la tanne même. Il en paroît ordinairement plus ſur le nez & ſur le menton qu'aux autres endroits du viſage, peut-être parce qu'en ces endroits la peau étant plus tenduë, les pores s'y tiennent plus ouverts pour recevoir en plus grande abondance & pour retenir la poudre qui vole deſſus.

Ce remede du fiel de bœuf étant une eſpece de leſſive, elle entre peu à peu dans les pores, où elle détrempe & diſſout entierement la tanne ; & comme dans cet état la tanne occupe beaucoup plus de place qu'elle ne faiſoit auparavant, la plus grande partie de ſa ſubſtance ſort de ſon creux & s'en va en farine, il faut un tems aſſez conſidérable pour remplir de nouveau ces creux, pendant lequel il n'en paroît point dans la peau.

DE

DE LA FORMATION ET DE L'ACCROISSEMENT DES COQUILLES DES ANIMAUX

tant terreſtres qu'aquatiques, ſoit de mer ſoit de riviere.

PAR M. DE REAUMUR.

* LA Sageſſe de la Nature n'auroit pas aſſez fait pour la conſervation des Animaux, ſi contente d'avoir travaillé avec un art merveilleux leurs délicates parties interieures, elle eût négligé d'emploier la même adreſſe à les défendre contre les corps qui les environnent : le trop rude attouchement de ces corps auroit bientôt détruit ces canaux ſi déliez, ces fibres ſi ſubtiles ſur leſquelles eſt fondé tout le jeu ſurprenant des machines animales. Auſſi la Nature a-t-elle pris ſoin de revêtir ces délicates parties de diverſes envelopes qui ne peuvent pas aiſément être alterées par les corps qui les entourent ; non-ſeulement elle les a renfermées dans une derniere peau plus ſerrée & plus ſolide que les autres, mais elle a encore ordinairement couvert cette derniere peau de poils, de plumes, d'écailles, ou de coquilles. Ce ſont là les petits remparts, s'il m'eſt permis de parler de la ſorte, à l'abri deſquels les machines animales peuvent ſoûtenir les efforts de la plûpart

* Novembre 1709.

des corps qui les frotent, pouſſent, ou choquent continuellement. L'attention même de la Nature a été juſques à proportionner la force de ces défenſes à la foibleſſe des parties interieures; je veux dire, que les animaux qui par leur figure, ou la moleſſe de leur ſubſtance dounent plus de priſe aux corps qui les environnent, ont en récompenſe de plus fortes enveloppes; ainſi voions-nous que des coquilles couvrent ceux dont la ſubſtance eſt très-humide & très-molle, & la figure preſque plate ou ſpirale, qui par ce double inconvenient ſeroient expoſez à être déchirez par la terre, le ſable ou les pierres ſur leſquelles ils rampent. Combien la Nature conſerve-t-elle d'eſpeces d'animaux differentes ſur la terre, dans les rivieres & dans les mers par le moien de ces coquilles? avec quel art ne paroît-elle pas les avoir travaillées? Il ſemble qu'elle ait pris plaiſir à varier leurs figures, leurs ſtructures & leurs couleurs. Auſſi la plûpart de ceux que les beautez de la Nature touchent, ont mis leurs ſoins à en aſſembler le plus qu'il leur a été poſſible, chaque nouvelle coquille fourniſſant de nouveaux attraits à leur curioſité; leurs cabinets ne contiennent qu'une partie de celles qui parent l'Univers, & en ont toûjours de reſte pour exciter l'admiration de ceux qui ſavent admirer. Mais il ſemble qu'on ſe ſoit borné à contempler ce bel ouvrage; perſonne, au moins que je ſache, n'a expliqué de quelle maniere il eſt produit; de ſorte que n'aiant pas trouvé à m'en inſtruire chez les Auteurs, j'ai conſulté la Nature elle-même par diverſes experiences; & c'eſt en rapportant ce qu'elles m'ont appris, que je vais faire voir dans la ſuite comment ſe font la formation & l'accroiſſement des Coquilles. Quoi-

Quoiqu'il parût d'abord naturel d'expliquer de quelle maniere les coquilles des animaux ſont formées avant de parler de leur accroiſſement, je ſuivrai cependant ici un ordre contraire. Je commencerai par expliquer de quelle maniere elles croiſſent, ce qu'il a été plus aiſé de découvrir par des experiences, & ce qui ſuffira pour faire connoître de quelle maniere ſe fait leur formation, qui n'eſt, pour ainſi dire, que leur premier degré d'accroiſſement.

Un corps peut croître de deux manieres differentes; ou, pour parler ſelon des idées plus diſtinctes, les petites parties de matiere qui viennent s'unir à celles dont le corps étoit déja compoſé, & qui par-là augmentent ſon étenduë, peuvent lui être ajoûtées par deux differentes voies: ou ces parties ne s'attachent à celles qui compoſent déja le corps qu'après avoir paſſé au travers de ce corps même, y avoir été préparées & en quelque façon rendues propres à occuper la place où elles ſont conduites; & c'eſt ce qu'on appelle ordinairement Croître par vegetation, & dans l'Ecole Croître par *Intuſſuſception*.

C'eſt ainſi que la ſéve monte dans les plantes par divers petits canaux des plantes mêmes, qui après l'avoir préparée en quelque ſorte la conduiſent en differens endroits de la plante où elle ſe colle, & augmente par conſéquent l'étenduë de cette plante. C'eſt ainſi qu'une certaine portion du ſang aiant été conduite par les arteres aux extremitez du corps de l'animal, s'attache à ſes chairs, & en augmente le volume. La ſeconde eſpece d'accroiſſement eſt lorſque les parties qui augmentent l'étendue d'un corps, lui ſont appliquées ſans avoir reçû aucune pré-

paration dans ce corps même, & c'eſt ce qu'on nomme Croître par appoſition, ou en termes de l'Ecole, par *Juxtapoſition*. Toutes ces plantes artificielles que nous devons à l'adreſſe des Chymiſtes, croiſſent de cette maniere, comme auſſi toutes les cryſtaliſations, les ſels, &c.

L'accroiſſement des coquilles doit ſe faire de l'une ou de l'autre des manieres précedentes. Ceux qui ont tout fait vegeter juſques aux pierres, n'auroient eu garde apparemment de ſoupçonner, que des coquilles travaillées avec tant d'art puſſent être produites par une ſimple juxtapoſition. L'analogie même qui paroît être entr'elles & les os (car ne pourroit-on pas les regarder comme des os exterieurs?) ſembleroit confirmer cette opinion, puiſque les os vegetent veritablement. Mais de pareilles conjectures ne ſuffiſent point en bonne Phyſique. Les ſeules experiences faites ſur les choſes dont il eſt queſtion, y doivent ſervir de baſes à nos raiſonnemens; elles ſeules peuvent nous faire connoître le chemin qu'il a plû à la Nature de prendre pour arriver à ſon but; c'eſt avec le ſecours de ces experiences que nous verrons dans la ſuite que les coquilles ſont produites par une ſimple appoſition. Au reſte, quoique je n'en aie fait que ſur quelques eſpeces de coquilles de terre, de mer, & de riviere, je ne laiſſe pas de me croire en droit d'expliquer en géneral l'accroiſſement & la formation des coquilles. Les voies générales dont la Nature ſe ſert pour produire des ouvrages ſemblables ſont aſſez connues. Ne ſuffiroit-il pas à un Phyſicien d'avoir expliqué comment une plante croît, de quelle maniere ſe fait la nutrition dans un animal pour en conclurre, ou plûtôt afin que tout le monde

de Philoſophe conclût avec lui, que c'eſt ainſi que toutes les plantes croiſſent ; que la nutrition ſe fait de la même maniere dans tous les animaux ; après qu'il a été démontré que le ſang circuloit dans l'homme, qui a douté qu'il ne circulât dans toutes les machines animales ?

Auſſi me contenterai-je de rapporter les experiences que j'ai faites ſur diverſes eſpeces de Limaçons terreſtres, pour ne pas fatiguer par d'ennuieuſes repetitions dans leſquelles je tomberois neceſſairement ſi je raportois de ſemblables experiences faites ſur des Limaçons aquatiques tant de riviere que de mer, ſur diverſes eſpeces de coquilles à deux pieces, comme Moules, Palourdes, Pectongles, &c. outre qu'il ne ſeroit pas aiſé à bien des gens de repeter les mêmes experiences ſur les coquilles de mer ou de rivieres, au lieu que tout le monde les peut faire commodement ſur les limaçons terreſtres. J'avertirai ſeulement que j'ai renfermé diverſes ſortes de coquillages de mer & de riviere dans de petites cuves que j'ai fait enfoncer dans la mer ou dans la riviere après les avoir percées de pluſieurs trous aſſez grands pour donner libre entrée à l'eau, mais trop petits pour laiſſer ſortir les coquillages ; ce qui m'a donné la facilité de faire à peu près les mêmes experiences ſur leurs coquilles, & avec le même ſuccès, que celles que je raporterai avoir faites ſur les Limaçons terreſtres. Ceci ſuppoſé, je paſſe à expliquer comment ſe fait l'accroiſſement des Coquilles.

Lorſque l'animal qui rempliſſoit exactement ſa coquille croît, il arrive que cette même coquille n'a plus aſſez d'étenduë pour le couvrir tout entier, ou qu'une partie de la ſurface du

corps de l'animal ſe trouve nuë ; la partie qui ſe trouve ainſi dépouillée de coquille par l'accroiſſement de l'animal eſt toûjours celle qui eſt la plus proche de l'ouverture de la coquille, car le corps de l'animal peut ſeulement s'étendre de ce côté-là. Tous les animaux qui habitent des coquilles tournées en ſpirale, comme les Limaçons, ne peuvent s'étendre que du côté de la tête où eſt l'ouverture de la coquille ; au lieu que les animaux des coquilles de deux pieces, comme les Moules, peuvent s'étendre dans tout leur contour. Or dans toutes les eſpeces de coquillages, c'eſt cette même partie du corps qui ſe trouve dépouillée par l'accroiſſement de l'animal, qui fait croître la coquille. Voici la méchanique ſur laquelle cet accroiſſement eſt fondé.

C'eſt un effet neceſſaire des loix du mouvement, quand les liqueurs coulent dans des canaux, que les petites parties de ces liqueurs, ou les petits corps étrangers mêlez parmi elles, qui à cauſe de leur figure ou leur peu de ſolidité par rapport à leur ſurface, ſe meuvent moins vîte que les autres, s'éloignent du centre du mouvement, ou qu'ils ſe placent proche des parois de ces canaux. Il arrive même ſouvent que ces petites parties s'attachent à la ſurface interieure de ces canaux, lorſqu'elles ſont aſſez viſqueuſes pour cela. Les canaux qui conduiſent de l'eau à des reſervoirs nous en fourniſſent des exemples. On voit ordinairement, lorſqu'on les ouvre, leur ſurface interieure couverte d'une petite croute de matiere viſqueuſe ; on remarque même que ceux dans leſquels paſſent certaines eaux, ont une croute pierreuſe. Il eſt de plus certain que les liqueurs qui

qui coulent dans ces canaux, pouſſent leurs parois de tous côtez, ou (ce qui eſt la même choſe) qu'elles pouſſent les petites parties pierreuſes & viſqueuſes des croutes dont nous venons de parler, contre les parois. De ſorte que ſi ces canaux étoient percez comme des cribles, d'une infinité de petits trous de figure propre à donner ſeulement paſſage à ces petits corps viſqueux & pierreux, ils s'échaperoient des canaux, & iroient ſe placer ſur leur ſurface exterieure, où ils formeroient la même croute que l'on voit ſur leur ſurface interieure avec cette ſeule difference que cette croute pourroit devenir beaucoup plus ſolide & même plus épaiſſe, étant moins expoſée au frottement de la liqueur que celle qui ſe forme dans l'interieur du tuyau. L'accroiſſement des coquilles eſt l'ouvrage d'une ſemblable Méchanique; la ſurface exterieure de la portion du corps de l'animal qui s'eſt trop étenduë pour être couverte par l'ancienne coquille, eſt remplie d'un nombre prodigieux de canaux dans leſquels circulent les liqueurs neceſſaires à la nutrition de l'animal; beaucoup de petites parties de matiere viſqueuſe & pierreuſe ſont mêlées parmi ces liqueurs, mais comme ces petites parties viſqueuſes & pierreuſes ſont moins fluides que celles qui compoſent les liqueurs avec leſquelles elles coulent, elles ſe trouvent les plus proches des parois de ces vaiſſeaux, qui étant remplis d'une infinité de pores du côté de la ſurface exterieure du corps de l'animal, propres à leur donner paſſage, ces petites parties de matiere pierreuſe & viſqueuſe s'échapent aiſément des canaux qui les contenoient; car elles ſont continuellement pouſſées contre leurs parois par la liqueur qui les rem-

plit; & elles vont ſe placer ſur la ſurface exterieure de ces canaux, ou plûtôt ſur toute celle du corps de l'animal qui n'eſt point couverte par la coquille, où elles arrivent avec d'autant plus de facilité, que tous les pores leur donnent une libre ſortie, au lieu que pluſieurs de ces pores peuvent être bouchez ſur le reſte du corps par la coquille dont il eſt revêtu. Ces petites parties de matiere pierreuſe & viſqueuſe étant arrivées à la derniere ſurface du corps de l'animal, s'attachent aiſément les unes aux autres & à l'extremité de la coquille; ſur tout lorſque ce qu'il y avoit de plus ſubtil parmi elles, s'eſt évaporé, elles compoſent alors toutes enſemble un petit corps ſolide qui eſt la premiere couche du nouveau morceau de coquille. D'autres petites parties de matiere ſemblable à celle de la premiere couche, dont la liqueur qui circule dans les vaiſſeaux fournit abondamment, s'échapent de ces vaiſſeaux par la même Méchanique; car on ne doit pas craindre que la premiere couche ait bouché tous les pores, & elles forment une ſeconde couche de coquille, il s'en forme de la même maniere une troiſiéme, & ainſi de ſuite, juſques à ce que la nouvelle coquille ait une certaine épaiſſeur, mais ordinairement beaucoup moindre que celle de l'ancienne, lorſque l'accroiſſement de l'animal donne l'origine à un autre nouveau morceau de coquille. C'eſt aux experiences que je vais raporter à faire voir, ſi j'ai veritablement décrit la maniere dont la Nature agit, ou ſi l'on doit regarder tout ce que je viens d'avancer comme un ſimple jeu d'imagination.

J'ai commencé par ſuppoſer que l'animal croît avant ſa coquille; & c'eſt de quoi il eſt aiſé de

s'aſ-

s'assurer, si l'on veut regarder avec quelque attention des limaçons de Jardin dans le tems qu'ils augmentent l'étenduë de la leur; on voit d'une maniere très-sensible qu'elle est trop petite pour les contenir. Ils s'attachent alors contre les murs, où ils restent en repos, & donnent la facilité d'observer qu'une portion de leur corps déborde tout autour de la coquille. Cette portion, comme tout le reste de leur corps, est remplie d'une quantité prodigieuse de petits canaux, les yeux seuls en aperçoivent un grand nombre qui leur paroît augmenter considerablement, lorsqu'on leur donne le secours du Microscope.

Les pores dont j'ai supposé ces canaux remplis sont trop petits pour être sensibles aux yeux, mais on se convainc de leur existence par leurs effets avec autant de certitude que si on les appercevoit fort distinctement; il ne faut pour cela que casser un morceau de la coquille d'un limaçon sans le blesser, ce qui est toûjours aisé de faire, parce qu'elle ne lui est adherente que dans un seul endroit, & ôter le morceau de coquille que l'on a cassée, on voit dans peu de tems la peau de l'animal se couvrir d'une liqueur, qui n'a pû arriver des vaisseaux dans lesquels elle étoit contenuë jusques à cette derniere surface, sans que les pores de ces vaisseaux l'aient laissé passer; si même pour s'assurer davantage de la route que cette liqueur a prise pour arriver sur la peau du limaçon, on ôte cette liqueur en essuiant la peau avec un linge, peu d'heures après on voit reparoître une liqueur semblable à celle que l'on a ôtée qui vient en même tems de toute la partie découverte, & qui par conséquent ne peut avoir passé que par les pores.

C'eſt cette liqueur, ou plûtôt les parties de matiere moins propres au mouvement mêlées parmi cette liqueur, qui ſervent à faire croître la coquille du Limaçon. On n'aura gueres lieu d'en douter lorſque l'on ſaura qu'elles reparent la perte du morceau de coquille qu'on lui a enlevée; *& c'eſt ce qu'on verra fort clairement, ſi après avoir dépouillé un Limaçon d'une partie de ſa coquille, on le met dans quelque endroit où l'on puiſſe le voir commodément, dans un vaſe par exemple, il n'eſt pas long-tems ſans s'attacher contre les parois de ce vaſe, comme ils s'attachent contre les murs des jardins dans le tems que leurs coquilles croiſſent. On voit alors cette liqueur s'épaiſſir & ſe figer, ou, pour parler ſelon des idées plus claires, les parties les plus ſubtiles s'évaporent, & les plus groſſieres reſtent ſeules, & forment ſur la partie du corps de l'animal qui eſt découverte une petite croute très-fine; on peut ſouvent diſtinguer cette croute après vingt-quatre heures; elle reſſemble aſſez alors par ſa fineſſe à ces toiles que les araignées des maiſons font dans les angles des murs. C'eſt cette croute qui forme la premiere couche de la nouvelle coquille. On voit au bout de quelques jours cette croute s'épaiſſir par le moien de differentes couches qui ſe produiſent ſous cette premiere; & enfin au bout de dix ou douze jours ordinairement, le nouveau morceau de coquille qui s'eſt formé a à peu près la même épaiſſeur de l'ancien morceau de coquille que l'on a ôté au Limaçon.

Lorſqu'on veut voir parvenir le nouveau morceau de coquille à l'épaiſſeur de l'ancienne, il faut avoir la précaution de mettre dans le vaſe où on a renfermé les Limaçons une nourri-

*FIG. I.

ture

ture qui leur ſoit convenable, ſur tout lorſqu'on a caſſé cette coquille proche de l'ouverture, ſans quoi le volume de leur corps diminuë conſiderablement, & ce qu'on leur a laiſſé de coquille ſe trouvant alors aſſez grand pour les couvrir, il ne ſe forme que les premieres feuilles de la coquille: il eſt même quelquefois à propos de les détacher des parois du vaſe, lorſqu'on remarque qu'ils y reſtent pluſieurs jours de ſuite, afin de les obliger de ſe ſervir de la nourriture qu'on leur a donnée, & de reparer la diſſipation qui s'eſt faite pendant la production des premieres feuilles du nouveau morceau de coquille.

On peut leur donner pour les nourrir, des herbes, même de la terre & du papier ſouvent arroſez d'eau; ils mangent aſſez indifferemment de toutes ces choſes, qui peuvent fournir des petites parties de matiere aſſez ſolide pour former la coquille. La terre, par exemple, doit être remplie d'une infinité de petites lames qui ſervent à former les pierres qui croiſſent dans ſon ſein. Si ces petites lames pierreuſes circulent avec les liqueurs dans les vaiſſeaux du Limaçon, elles doivent ſans doute être très-propres à bâtir les diverſes couches de coquilles: or on peut s'aſſurer par une experience facile que ces petites parties pierreuſes circulent avec ces liqueurs. On n'a pour cela qu'à mettre une certaine quantité de cette liqueur dans un vaſe, & la laiſſer expoſée à l'air pendant quelques jours. Après que le plus ſubtil s'eſt évaporé, on voit au fond du vaſe une matiere ſolide, parmi laquelle on diſtingue beaucoup de petits grains d'une matiere blanche friable, aſſez reſſemblans à des grains de ſable, à cela près qu'ils

ont moins d'épaiſſeur. On ſait de plus que les limaçons au commencement de l'hyver, font avec cette liqueur ou leur bave un petit couvercle à l'ouverture de leur coquille, dans laquelle ils ſe renferment entierement. A la verité ce couvercle eſt d'une tiſſure aſſez differente de celle de la coquille, mais il eſt ſolide, & cela ſuffit pour faire voir qu'il y a beaucoup de matiere ſolide mêlée parmi ces liqueurs. La difference qui eſt entre la tiſſure de la coquille, & celle de ce couvercle vient ſans doute de la difference des pores par leſquels cette liqueur a paſſé avant de former l'une ou l'autre.

La maniere ſeule dont ſe forme un nouveau morceau de coquille en la place de celui qu'on a enlevé, pourroit ſuffire pour prouver que les coquilles ne vegetent point ; car ſi elles croiſſoient par vegetation, ce ne pourroit être que de deux manieres qu'il n'eſt pas poſſible d'accommoder avec l'experience précédente. Ou les liqueurs que l'animal fourniroit pour l'accroiſſement de la coquille, & qu'il ne pourroit dans cette hypothêſe lui communiquer que par le petit endroit auquel il lui eſt attaché, qu'on devroit regarder alors en quelque ſorte comme la racine de la coquille ; ou, dis-je, ces liqueurs enfileroient dès cet endroit des canaux qui les porteroient à toutes les parties de la coquille ; ou ils ne les conduiroient que vers l'extremité qui doit s'étendre ; or dans l'une & l'autre de ces ſuppoſitions, il arriveroit que lorſque l'on auroit caſſé un morceau de la coquille, la liqueur qui coule au travers de cette coquille, s'échaperoit par l'ouverture qu'on lui a faite ; & alors ce ſeroit ſur le contour du trou qu'on

a fait

a fait à la coquille, que l'on appercevroit cette liqueur que l'on ne voit que ſur le corps de l'animal ; laquelle liqueur après s'être figée, feroit une eſpece de calus, qui s'augmentant peu à peu boucheroit enfin entierement le trou. C'eſt ainſi que les calus des os fracaſſez ſe forment par l'extravaſion du ſuc qui ſervoit auparavant à les nourrir & à les faire croître, que lorſque l'on a coupé des chairs de quelque partie du corps, les chairs voiſines s'étendent & recouvrent la partie qu'on avoit découverte ; enfin nous voions arriver la même choſe aux arbres dont on a enlevé une partie : il ſe forme un calus du ſuc qui s'extravaſe de l'arbre & qui recouvre l'arbre peu à peu ; tout ſe paſſe autrement dans la production du nouveau morceau de coquille. Rien ne s'échape de la coquille ; toute l'étenduë du trou ſe bouche en même tems par la liqueur qui ſort du corps de l'animal ; & afin qu'on ne ſoupçonne pas que cette liqueur s'étant extravaſée de la coquille d'une maniere inſenſible tombe par ſon propre poids ſur le corps de l'animal où elle ſe raſſemble en aſſez grande quantité pour compoſer enſuite le nouveau morceau de coquille qui eſt toûjours poſé directement ſous l'ancienne ; je vais raporter deux experiences qui ſerviront également à diſſiper ce ſcrupule, & à démontrer ce que j'ai avancé.

* J'ai caſſé pluſieurs coquilles de limaçon de deux manieres differentes. Premierement, j'ai fait aux unes un aſſez grand trou entre les deux extrémitez de la coquille, c'eſt-à-dire entre la coquille & ſon ouverture ; après quoi j'ai fait couler par ce trou entre le limaçon & ſa coquil-

* Fig. II.

quille un morceau de peau de cannepin, c'eſt avec cette peau qu'on fait les gands qu'on nomme *Gands de poule*; cette peau étoit très-mince, mais d'une tiſſure ſerrée, j'ai collé cette peau à la ſurface interieure de la coquille, de maniere qu'elle bouchoit aſſez exactement le trou que je lui avois fait; c'eſt-à-dire, que je l'ai collée entre la coquille & le corps de l'animal. Or il eſt évident que ſi la coquille ne ſe formoit pas d'une liqueur qui ſort immédiatement du corps de l'animal, mais de celle qui paſſe au travers de la coquille, qu'il auroit dû ſe former un morceau de coquille ſur la ſurface exterieure de la peau de gand, & qu'il n'étoit pas poſſible qu'il s'en formât entre le corps du Limaçon & cette peau. Le contraire eſt cependant toûjours arrivé; le côté de la peau qui touchoit le corps de l'animal, s'eſt couvert de coquille, & il ne s'eſt rien formé ſur la ſurface exterieure.

L'autre experience n'eſt pas moins déciſive que celle-ci. 2°. J'ai caſſé pluſieurs coquilles de Limaçon de maniere que j'ai diminué le nombre de leurs tours. *J'ai, par exemple, réduit des coquilles de gros Limaçons des jardins, qui ſont ordinairement quatre tours de ſpirales, ou quatre tours & demi, à trois tours & demi ou à quatre tours; ainſi j'ai rendu ces coquilles trop petites pour couvrir le Limaçon; & je les ai miſes à peu près dans le même état où elles ſont, lorſque l'accroiſſement du corps de l'animal les fait croître. Après avoir ainſi caſſé pluſieurs coquilles, j'ai pris comme dans l'experience précédente un morceau de peau auſſi large que le contour de l'ou-

* FIG. III.

l'ouverture de la coquille, j'ai fait entrer une des extrémitez de cette peau entre le corps du Limaçon & la coquille, à la ſurface interieure de laquelle j'ai collé cette peau ; & aiant renverſé l'autre extrémité de la peau ſur la ſurface exterieure de la coquille, je la lui ai pareillement collée ; d'où l'on voit que j'ai enveloppé tout le contour de l'ouverture de la coquille avec cette peau. Or ſi la coquille croiſſoit par un principe de vegetation, il ſeroit arrivé l'une de ces deux choſes, ou le morceau de peau ainſi collé l'auroit empêché de croître, ou la coquille s'allongeant auroit porté la peau plus loin. Mais il eſt arrivé au contraire que la coquille a crû, & que la peau eſt reſtée où je l'avois placée ; car l'accroiſſement de la coquille s'eſt fait de telle ſorte, que l'épaiſſeur du gand eſt reſtée entre le nouveau morceau de coquille & l'ancienne, qui par conſéquent n'a contribué en rien à cette formation.

Au reſte il ne doit pas paroître difficile à concevoir comment les petites parties de matiere ſolide qui ſont mêlées parmi la liqueur, peuvent s'attacher les unes aux autres pour former une premiere couche de la nouvelle coquille, ni comment une ſeconde couche peut s'unir à cette premiere, une troiſiéme à la ſeconde, & ainſi de ſuite ; ou plûtôt, cette difficulté n'eſt point differente de celle que l'on a à expliquer l'union des parties de tous les corps ſolides ; mais quelque ſyſtême que l'on veuille adopter, il eſt aiſé de comprendre que ces petites parties ſolides qui nagent dans une liqueur très-viſqueuſe, ont une grande facilité à s'unir entr'elles, comme auſſi les diverſes couches de coquille qu'elles compoſent ; je raporterai pourtant

tant une experience qui pourroit peut-être donner quelque ouverture pour expliquer comment ces petites parties qui forment les coquilles, s'attachent les unes aux autres.

J'ai broïé dans un mortier des coquilles de Limaçon ; & après les avoir réduites dans une poudre très-fine, j'ai fait paſſer cette poudre par un tamis dont le tiſſu étoit très-ſerré, afin d'en ſéparer les parties les plus groſſieres. J'ai mis cette poudre dans un vaſe, & j'ai jetté du vinaigre deſſus avec lequel elle a fermenté. Il s'eſt fait une eſpece de pâte que j'ai laiſſée ſécher expoſée à l'air ; elle eſt devenuë d'une aſſez grande dureté ſur tout la premiere couche, ou celle qui étoit la plus expoſée à l'air ; lorſqu'au contraire j'ai délaié cette poudre avec de l'eau, quand elle s'eſt ſéchée, les petits grains de poudre ont ceſſé d'être adherens. D'où il paroît que des acides analogues à ceux du vinaigre ſont très-propres à lier entr'eux les petits corpuſcules qui forment les coquilles de Limaçon. Ceux qui emploient volontiers par tout les acides de l'air, pourroient trouver ici leur compte, en s'imaginant qu'ils contribuent à coaguler la liqueur qui vient ſe placer ſur le corps du Limaçon ; mais il ſemble que pour rendre cette conjecture vrai ſemblable, il ſeroit neceſſaire qu'il ſe trouvât auſſi certains acides mêlez parmi l'eau de mer qui ſerviſſent à coaguler les liqueurs qui forment les coquilles de mer ; & ſi cela étoit vrai, il devroit arriver, lorſqu'on auroit délaïé de la poudre de coquille de mer avec de l'eau de mer, que cette poudre auroit plus de conſiſtance étant ſéche, que n'en a celle de coquille de Limaçon délaïée avec de l'eau de riviere, & c'eſt ce qui n'arrive point.

On

On ne doit pas craindre auſſi, qu'une premiere feuille de la coquille étant formée, elle bouche tous les paſſages neceſſaires à la nouvelle liqueur qui doit s'échaper des vaiſſeaux pour produire une ſeconde couche de la coquille ; & ainſi de ſuite juſques à ce qu'elle ait une certaine épaiſſeur. Il n'eſt pas poſſible que le corps du Limaçon s'applique aſſez exactement ſur cette nouvelle feuille de coquille, pour boucher entierement tous ces petits pores : on verra même cette difficulté s'évanouïr entierement pour peu qu'on faſſe réflexion que cette premiere couche de coquille n'a pû être produite ſans que le volume du corps du limaçon ſoit diminué non-ſeulement de la quantité des parties ſolides qu'il a fournies pour ſa formation, mais encore de beaucoup de parties de matiere plus liquide qui étoient mêlées parmi elles, & qui ſe ſont évaporées, ſans ce qui peut s'être diſſipé par d'autres voies. Ainſi on voit qu'il doit rester assez d'espace entre cette nouvelle feuille, qui eſt immédiatement appuyée ſous l'ancienne coquille, & le corps de l'animal, pour qu'une nouvelle liqueur puiſſe ſe placer entre deux, & former enſuite une ſeconde couche par la même Méchanique qui a formé la premiere ; on raiſonnera de même de la troiſiéme couche, & de toutes celles qui donnent l'épaiſſeur de la coquille.

Les diverſes couches qui compoſent l'épaiſſeur de la coquille deviennent très-ſenſibles, ſi on jette les coquilles dans le feu, & qu'on les en retire après les avoir un peu laiſſé brûler : l'épaiſſeur de la coquille ſe diviſe alors en un grand nombre de differentes feuilles qui ſe ſont un peu éloignées les unes des autres, le feu aiant

aiant trouvé des paſſages plus commodes entre ces diverſes feuilles, qu'entre les petites qui forment chacune d'elles ; c'eſt auſſi ce qui arrive ordinairement aux corps formez par couches. Toutes les patiſſeries que l'on nomme feuilletées, nous en fourniſſent un exemple vulgaire, mais ſenſible : tout leur art eſt d'être faites de diverſes couches de pâte & de beurre poſées les unes ſur les autres ; lorſqu'on les fait cuire, elles ſe diviſent en pluſieurs feuilles, le feu s'ouvrant plus aiſément des chemins ou en trouvant d'ouverts entre ces differentes couches qui ne peuvent jamais être exactement appliquées les unes ſur les autres dans toute leur étenduë.

Les diverſes feuilles peuvent aiſément s'attacher les unes aux autres ſans qu'il doive arriver qu'elles ſe collent auſſi au corps de l'animal qu'elles couvrent ; l'humidité de ſa peau doit l'empêcher ; & s'il leur arrivoit de s'y coller legerement, les divers mouvemens qu'il ſe donne dans ſa coquille, ſuffiroient pour les détacher.

C'eſt une ſuite neceſſaire de la maniere dont nous venons de voir que les coquilles de Limaçons croiſſent, qu'elles ne deviennent plus grandes que par l'augmentation du nombre de leurs tours de ſpirale, & que la longueur de chaque tour de la coquille formée reſte toûjours la même ; c'eſt auſſi une verité de laquelle il eſt aiſé de ſe convaincre : ſi l'on réduit la coquille d'un Limaçon qui eſt parvenuë à ſon dernier degré d'accroiſſement, au même nombre de tours que celle d'un petit limaçon de la même eſpece, ces deux coquilles alors paroiſſent de même grandeur. J'ai comparé pluſieurs fois des coquilles de Limaçons

çons qui ne faiſoient qu'éclore, ou même que j'avois tirées de leurs œufs avant qu'ils fuſſent éclos *, avec d'autres coquilles des plus gros Limaçons de la même eſpece, auſquelles je ne laiſſois que le même nombre de tours de ſpirale qu'avoient ces petites coquilles ; & alors elles paroiſſoient égales : au reſte le nombre de ces tours augmente conſidérablement la grandeur de la coquille des Limaçons, & un tour plus ou moins fait une grande difference ; car le diametre de chaque tour de ſpirale, ou ſa plus grande largeur, eſt à peu près double de celui qui la précede, & la moitié de celui qui la ſuit ; ainſi on voit qu'un demi-tour, ou même un quart de tour plus ou moins, doit conſidérablement augmenter l'étenduë de la coquille ; & il n'eſt pas ſouvent aiſé de démêler ſi une coquille fait un quart de tour plus ou moins. De ſorte que pour remarquer fort diſtinctement qu'une coquille fait plus ou moins de tours qu'une autre coquille de même eſpece, il eſt néceſſaire de comparer de groſſes coquilles de cette eſpece avec de très-petites de la même eſpece, & alors la difference des tours devient fort ſenſible.

Tout ce que nous avons dit juſques ici de l'accroiſſement des coquilles, nous exempte d'entrer dans le détail de leur premiere formation. Car on conçoit aiſément que lorſque le corps d'un petit embryon, qui doit un jour remplir une groſſe coquille, eſt parvenu à un certain état, dans lequel diverſes peaux qui l'enveloppent ont aſſez de conſiſtance pour laiſſer échaper par leurs pores la ſeule liqueur propre à former la coquille ; on conçoit, dis-je, que

* Fig. IV.

que cette liqueur va ſe placer ſur ces peaux, qu'elle s'y épaiſſit, qu'elle s'y fige, en un mot, qu'elle y commence la formation de la coquille de la même maniere qu'elle continuë ſon accroiſſement. Les Limaçons ne ſortent point de leurs œufs ſans être déja revêtus de cette coquille, qui a alors un tour de ſpire & un peu plus.

Il me reſte à éclaircir deux difficultez, qui pourroient paroître conſidérables : la premiere naît naturellement des Experiences que j'ai raportées ; voici en quoi elle conſiſte. Le nouveau morceau de coquille qui ſe forme pour boucher le trou qu'on a fait à la coquille du Limaçon, eſt ordinairement de couleur blanchâtre, & par conſéquent très-differente de celle du reſte de la coquille : d'où il ſemble qu'il doit être d'une differente tiſſure ; & on en pourroit conclure avec quelque apparence qu'il n'eſt pas formé de la même maniere que le reſte de la coquille ; ainſi les experiences précedentes ne décideroient rien pour leur acroiſſement ordinaire. Pour répondre à cette difficulté, il eſt néceſſaire d'expliquer d'où naît la réguliere varieté des couleurs de certaines coquilles ; les mêmes experiences qui en fourniront la cauſe, ſerviront à diſſiper entierement cette difficulté.

Cette varieté réguliere de couleurs eſt ſur tout remarquable dans une petite eſpece de Limaçons des jardins ; le fond de leur coquille eſt blanc, citron, ou jaune, ou d'une couleur moienne entre celles-ci. * Differentes raies paroiſſent tracées ſur ce fond, elles tournent en ſpirale comme la coquille, dans quelques-unes ces

* FIG. IV. V.

ces raies ſont noires, dans d'autres brunes, quelquefois rougeâtres. La largeur de chacune de ces raies s'augmente inſenſiblement en s'approchant du côté de l'ouverture de la coquille: il arrive même quelquefois que deux de ces raies s'étendent aſſez pour ſe rencontrer, & ne faire qu'une ſeule raie dans la ſuite; quelques coquilles ont juſques à cinq ou ſix de ces raies, d'autres n'en ont que trois ou quatre, même deux ou une ſeule: on peut auſſi remarquer diverſes raies brunes & blanches ſur les gros limaçons des jardins; mais elles frappent moins, & il faut les regarder avec quelque attention pour les démêler les unes des autres: les Limaçons de l'une & de l'autre eſpece n'ont pas toutes ces raies de même largeur dans le même endroit de la coquille.

Il ne paroît qu'une ſeule maniere vrai-ſemblable de rendre raiſon de la varieté de ces couleurs dans le ſyſtême que nous avons établi de l'accroiſſement des coquilles par *juxtapoſition*: car aiant regardé la peau de l'animal comme une eſpece de crible qui donne paſſage aux particules qui ſervent à former la coquille, il eſt clair que ſi l'on conçoit que cette peau eſt differemment percée en divers endroits; ou (ce qui revient au même) qu'elle eſt compoſée de differens cribles dont les uns laiſſent paſſer de petites parties differentes en figure, ou de differente nature de celles qui paſſent par les autres, & ferment le paſſage à celles-ci; il arrivera que ces petites parties de figure, ou de nature differente, ſeront propres à former des corps qui réfléchiront differemment la lumiere, c'eſt-à-dire, qu'elles formeront des morceaux de coquille de diverſes couleurs.

C'eſt

C'eſt auſſi une ſuite neceſſaire de la maniere dont croît la coquille du Limaçon, que tout le contour de cette coquille (je ne dis pas toute ſon épaiſſeur) ſoit formé par le colier du Limaçon parce qu'il eſt la partie la plus proche de la tête, & que par conſéquent pour peu que l'animal croiſſe, il ceſſe ce colier d'être couvert par l'ancienne coquille : c'eſt donc toûjours à lui à l'étendre, & on peut le regarder comme l'ouvrier de tout le contour de la coquille; ainſi il ſuffira que ce colier ſoit compoſé de differens cribles pour former une coquille de differente couleur : s'il a, par exemple, deux ou trois petits cribles propres à laiſſer paſſer les parties noires ou brunes, & que les côtez de ces cribles ſoient paralleles entr'eux, pendant que le reſte de ſa ſurface laiſſe échaper toutes les petites parties de matiere propres à réfléchir la lumiere de telle ſorte qu'elle faſſe appercevoir une couleur de citron ; la coquille qui ſera formée par les petits corps qui ont paſſé par ces differens cribles, ſera elle-même de couleur d'un fond citron avec des raies noires ou brunes, preſque paralleles ou qui s'aprocheront les unes des autres inſenſiblement, & deviendront plus larges dans la même proportion que ces cribles ſeront augmentez.

Quand nous ne verrions rien de ſemblable aux differens cribles dont je viens de parler ſur le colier du limaçon, ils nous fourniſſent une explication ſi probable de la varieté des couleurs des coquilles, qu'il ſeroit neceſſaire de les y ſuppoſer; mais heureuſement ils ſe découvrent eux-mêmes, ſur tout dans la petite eſpece de limaçon ſi remarquable par ſes raies diſtinctes. * Lorſqu'on a dé-

* FIG. V.

a dépouillé un de ces Limaçons d'une partie de ſa coquille, tout le reſte du corps paroît d'une couleur aſſez blanche, au colier près dont le blanc tire un peu plus ſur le jaune, & qui outre cela eſt marqué d'un nombre de raies noires ou brunes égal à celui des raies de la coquille, & poſées dans le même ſens; ainſi les Limaçons qui n'ont qu'une raie noire ſur leur coquille, n'ont auſſi qu'une tache noire ſur leur colier; ceux qui ont quatre raies ſur la coquille, en ont auſſi toûjours quatre ſur le colier: ces raies ſont placées immédiatement ſous celles de la coquilles; elles commencent à une ligne quelquefois, ou environ de l'extrémité du colier qui eſt auſſi ordinairement elle-même tachetée de noir tout autour. La longueur de ces raies du colier eſt differente dans differens Limaçons de même eſpece; on ne peut méconnoître les cribles dont j'ai parlé en remarquant ces raies; leur differente couleur prouve la difference de leur tiſſure.

Pour ne pouvoir plus douter que ces taches ne faſſent la fonction de cribles differens de ceux du reſte du colier, & que le reſte du colier qui paroît auſſi de couleur differente du reſte de la peau du corps entier, laiſſe auſſi échaper des particules d'une figure, ou d'une nature differente; il ne s'agit que de ſavoir ſi l'expérience s'accommode avec ces raiſonnemens; & il ne faut pour cela que laiſſer réparer au Limaçon la coquille qu'on lui a enlevée: car s'il arrive que ce qui ſe forme de coquille vis à vis ces raies noires ſoit noir, & que ce qui eſt formé entr'elles ſoit d'une couleur differente de ce qui s'eſt formé ſur ces raies & ſur le reſte du corps; il doit paroître inconteſ-

table que ces differens endroits ſont les fonctions qu'on leur a attribuées. Or l'experience ſe trouve parfaitement d'accord avec le raiſonnement précédent : *la coquille qui croît ſur le colier vis-à-vis les raies brunes ou noires, eſt elle-même noire ou brune ; celle qui ſe forme entre ces raies, eſt blanche ou citron ; & celle qui vient ſur tout le reſte du corps, eſt blanche, mais d'un blanc different de celle du colier lorſqu'elle eſt blanche auſſi. La même choſe arrive aux gros Limaçons des jardins : toute la coquille qui ſe forme ſur leur colier, eſt brune ou de couleur ſemblable à celle de l'ancienne ; & la coquille qui vient ſur le reſte de leur corps, eſt blanche.

Il eſt bon de diſſiper à preſent un autre ſcrupule qui pourroit naître à ceux qui tenteroient les mêmes expériences que j'ai raportées. Il arrive quelquefois que la nouvelle coquille qui ſe forme vis-à-vis le colier en la place de celle qu'on a ôtée, n'eſt pas de même couleur que l'ancienne ; il ſemble pourtant par l'explication & les experiences que je viens de raporter, que cela ne devroit pas arriver.

Cette eſpece d'irrégularité paroîtra moins difficile à concilier avec les raiſonnemens & les experiences précédentes, lorſqu'on fera attention que la nouvelle coquille formée vis à vis le colier, n'eſt jamais de couleur differente de celle de l'ancienne, à moins que ſa ſurface exterieure ne ſoit extrémement raboteuſe, & qu'elle ne repreſente pluſieurs ſillons, au lieu que celle du reſte de la coquille eſt aſſez polie.

L'inégalité de cette ſurface de la nouvelle coquille eſt cauſée par les mouvemens que le Limaçon ſe donne lorſqu'il veut rentrer dans ſa

* FIG. VI.

ſa maiſon, avant que la nouvelle coquille ait aſſez d'épaiſſeur pour ſe ſoûtenir, ſans s'appuier ſur lui ; car il eſt aiſé de comprendre que s'il ſe retire ainſi, lorſqu'il n'y a encore qu'une ou peu de feuilles formée du nouveau morceau de coquille, il raprochera l'extrémité de ces feuilles trop minces encore pour pouvoir ſe ſoûtenir, de l'ancienne coquille ; & que les réduiſant à un moindre eſpace, il leur fera faire differens plis, ce qui pourroit preſque ſeul ſuffire pour changer la couleur de la nouvelle coquille : mais il eſt quelque choſe de plus ; c'eſt que la premiere couche qui ſe forme lorſqu'on a enlevé un grand morceau de coquille eſt ordinairement blanche, les parties de liqueur propres à former la coquille de cette couleur ſortant plus aiſément par les pores qui leur donnent paſſage, que ne font celles qui forment la coquille d'une autre couleur ; ce qui eſt aſſez viſible, le reſte du corps de l'animal étant couvert de liqueur d'une matiere très-ſenſible, avant qu'on en aperçoive ſur ſon colier, d'où il arrive que cette liqueur s'étend ſur le colier & y produit une premiere couche de coquille blanche ; mais comme cette couche eſt extrémement mince, elle eſt auſſi tranſparente & ne ſuffit pas ordinairement pour empêcher la coquille que le colier lui-même a produit enſuite, de paroître de la couleur qui lui eſt naturelle. Or s'il arrive que le Limaçon rentre dans ſa coquille lorſqu'il n'y a encore que cette premiere couche blanche de produite, on voit clairement qu'il raprochera les extrémitez de cette couche l'une de l'autre, parce qu'elle lui eſt adherente en quelques endroits, qu'il lui fera faire differens plis, & augmentera ſon épaiſſeur en diminuant

nuant ſa largeur & ſa tranſparence; ce qui rendra la nouvelle coquille d'une couleur moienne entre celle qui eſt ordinairement formée ſur le colier, & celle qui eſt formée ſur le reſte du corps : mais la ſurface interieure du nouveau morceau de coquille qui eſt toûjours polie, doit auſſi toûjours être de la couleur de celle que doivent former les pores qui lui correſpondent; auſſi paroît-elle de couleur variée de la même maniere que celle de l'ancienne coquille, lors même que la ſurface exterieure n'a pas la couleur qui ſemble lui être naturelle.

On concluroit mal, ſi l'on concluoit de ce que nous venons de dire de la formation des raies qui parent certaines eſpeces de coquilles, que la ſurface exterieure de toutes les coquilles devroit être raiée, ou d'une couleur uniforme, & qu'il ne devroit point y en avoir de ces coquilles dont la ſurface exterieure fût marquée de diverſes taches poſées differemment, de figure irréguliere, ſéparées les unes des autres par des intervalles inégaux, telle qu'eſt la coquille de la figure 7e, & cela fondé ſur ce que ces taches ne peuvent être produites ſur la ſurface de la coquille, ſans qu'il y ait ſur le collier de l'animal qui l'habite, des eſpeces de petits cribles qui laiſſent paſſer une liqueur differente de celle qui paſſe par les autres endroits, & par conſéquent ſans que cet animal ait tout ce qui eſt neceſſaire pour produire une coquille raiée. Car il eſt aiſé de voir, qu'il faut que ces cribles ſubſiſtent pendant l'entiere formation de la coquille, afin de rendre cette coquille raiée dans toute ſon étenduë, mais s'il arrive au contraire que ces cribles changent, c'eſt-à-dire, que ſi les pores qui laiſſent échaper de la li-

liqueur propre à former une coquille de couleur brune, deviennent trop larges ou trop étroits, ou changent en quelqu'autre façon de figure, après avoir filtré une certaine quantité de cette liqueur, & ceux qui donnoient paſſage à la liqueur qui forme la coquille blanche, changent auſſi de configuration, il arrivera auſſi alors que la coquille qui ſe formera, ſera marquée de diverſes taches noires & blanches combinées avec la même irregularité que s'eſt fait le changement des cribles.

Ceci ne paroîtra pas une ſuppoſition purement gratuite, à ceux qui voudront faire attention qu'il arrive même quelques changemens aux cribles du colier des Limaçons qui produiſent les coquilles raiées; car on peut remarquer que quelques-unes de ces coquilles ont des raies très-marquées & d'une couleur très-vive vers leur ouverture, pendant qu'on n'aperçoit aucune de ſes raies ſur les premiers tours de la ſpirale, c'eſt-à-dire, ſur ceux qui ſont les plus proches du ſommet de la coquille, ou qu'on les y voit ces raies marquées très-foiblement. Or ce changement de couleur ne peut être arrivé que par un pareil changement dans les cribles du colier. Il faut à la verité imaginer des changemens bien plus conſiderables ſur le colier des animaux qui habitent des coquilles telles que celle de la figure 6e, mais ces changemens ſont également poſſibles.

La fluidité de la liqueur qui ſert à former la coquille, a peut-être auſſi quelque part à la diſtribution irréguliére des couleurs que l'on voit ſur quelques eſpeces. Car il eſt aiſé de concevoir que ſi certains animaux laiſſent échaper pour la formation de la coquille, une liqueur

assez fluide & qui coule aisément d'un endroit sur un autre, il pourra se former de coquilles marquées irrégulierement, s'ils ont des cribles sur leur colier qui laissent passer des liqueurs differentes; puisqu'il arrivera souvent alors que la liqueur ne restera pas vis-à-vis l'endroit par où elle est sortie, & que ce qui est sorti de liqueur propre à faire de la coquille blanche, ira se poser sur l'endroit d'où est sortie la liqueur qui fait la coquille noire; comme aussi celle qui fait la coquille noire, coulera peut-être sur l'endroit où est sortie quelqu'autre liqueur qui fait la coquille blanche. Or comme cela arrivera irrégulierement selon les diverses positions plus ou moins inclinées dans lesquelles sera l'animal lorsque la coquille se forme, ces taches seront aussi posées d'une maniére irréguliere.

Il faut pourtant avoir recours à la 1re des deux causes dont nous venons de parler; c'est-à-dire, au changement de la tissure des cribles du colier, pour expliquer la réguliere position des taches rouges, de figure quarrée ou rectangle, qui ornent la coquille representée fig. 8e, étant nécessaire pour la former telle, que les cribles de figure quarrée ou rectangle, qui laissent passer la liqueur propre à colorer ainsi la coquille, se bouchent & se débouchent dans une certaine proportion.

Quoique le colier du Limaçon trace tout le contour de la coquille, & que cela suffise pour lui donner les couleurs distribuées régulierement, il ne lui donne pas cependant toute l'épaisseur qu'elle peut avoir, de petites parties de liqueur qui s'échapent par les pores du reste de la peau, l'augmentent cette épaisseur, c'est de quoi on ne peut douter; car si l'on reduit la co-

coquille d'un gros Limaçon au même nombre de tours que celle d'un petit, elles paroiſſent également grandes, mais celle du grand paroît plus épaiſſe. Cette augmentation de l'épaiſſeur de la coquille eſt ſur tout remarquable dans quelques eſpeces de coquilles de mer tournées en ſpirale, elle devient quelquefois telle que les premiers tours de la coquille ſe bouchent enfin abſolument, & que la queuë de l'animal qui les habite eſt obligée de ſe placer dans des tours plus éloignez, ce qu'on peut voir d'une maniere très-ſenſible dans des coquilles que M. *Mery* a diſſequées avec beaucoup d'adreſſe. La figure 8e repreſente une de ces coquilles; les eſpaces marquez *aaa* occupez autrefois par les corps de l'animal, y ſont devenus entierement ſolides.

La queuë de l'animal n'étant point adherante au ſommet de la coquille, comme quelques-uns l'ont crû, il lui eſt aiſé de ſe déplacer, ſur tout dans le temps que l'endroit par lequel l'animal eſt attaché à la coquille, change (car cet endroit change ſelon que le corps de l'animal fait plus ou moins de ſpires): un petit Limaçon, par exemple, y ſera attaché par une partie du premier tour de ſa ſpire; & lorſqu'il ſera devenu plus gros, il n'y ſera attaché que dans le 2e tour.

Les dernieres couches qui ſont produites par la peau qui ne couvre pas le colier du Limaçon, doivent être blanches, ſelon tout ce que nous avons dit juſques ici, auſſi le ſont-elles; ce que l'on voit aiſément ſi on ſe donne la peine d'uſer avec une lime les premieres couches de la ſurface extérieure de ces coquilles, celles qui reſtent alors paroiſſent blanches; ou ſans ſe

donner ces mouvemens, on peut s'assurer de la même chose, en faisant attention que les couleurs des coquilles vuides que l'on trouve dans les jardins, sont souvent très-effacées, & que dans quelques endroits mêmes elles paroissent blanches, les premieres couches qui sont seules colorées aiant été enlevées par de frequens frottemens contre la terre.

L'accroissement des coquilles étant proportionné à celui des animaux qui les habitent, se fait d'une maniere presque insensible; on peut néanmoins dans la plûpart des coquilles distinguer assez aisément leurs divers degrez d'accroissement: ils sont marquez par diverses petites éminences paralleles entr'elles, qu'on prendroit volontiers pour les fibres de la coquille: ces éminences regnent sur tout le contour de la coquille, dans celles qui sont plattes ou de deux pieces, & sur la largeur dans celles qui sont tournées en spirale. Pour peu qu'on fasse attention à la maniere dont nous venons de voir que les coquilles se forment, on remarquera aisément qu'elles ne peuvent croître sans laisser paroître les petites éminences dont je viens de parler: car chaque nouveau petit morceau de coquille doit être immédiatement collé sous celui qui le précede, qui par conséquent sera plus élevé que celui-ci de toute l'épaisseur qu'il avoit, lorsque l'accroissement de l'animal a donné l'origine à ce dernier, sous lequel doit aussi être posé le morceau qui est produit ensuite. Ainsi la coquille doit être remplie d'un grand nombre de petites éminences paralleles entr'elles; on les voit fort distinctement sur les coquilles des Limaçons*, elles sont très-proches les unes des autres.

* FIG. I.

Cha-

Chaque coquille * a ordinairement quelques-unes de ces éminences beaucoup plus distinctes que les autres, & assez éloignées, elles marquent les differens tems où la coquille a cessé de croître, & ont quelque chose d'analogue avec les diverses pousses qu'on peut remarquer sur chaque jet d'arbre. La chaleur de l'été ou le froid de l'hyver arrêtant l'accroissement de l'animal qui habite les coquilles, ce que nous voions arriver aux Limaçons, l'étenduë de la coquille ne peut pas s'augmenter pendant ces saisons; il n'en est pas de même de son épaisseur, car il s'échape continuellement de petites parties de liqueur du corps de l'animal dont elle profite. Ainsi lorsqu'il recommence à croître dans une saison plus favorable, le nouveau morceau de coquille qu'il produit, se colle sous une coquille beaucoup plus épaisse que lorsque son accroissement se fait insensiblement; par conséquent ce premier terme doit être marqué par une plus grande éminence.

Il est encore une autre chose qui rend sensibles ces differens endroits où la coquille a commencé à croître après avoir cessé quelque tems; c'est un changement de couleur qu'on aperçoit distinctement sur les raies dont nous avons parlé ci-dessus: les raies noires ou brunes sont dans ces endroits d'une couleur beaucoup plus claire, & même quelquefois peu différente de celle du reste de la surface superieure de la coquille. La cause de ce changement n'est pas difficile à trouver pour peu qu'on se souvienne que les † cribles du collier qui laissent passer la liqueur propre à former ces raies noires ou brunes, ont leur origine à quelque distance de l'extré-

* Fig. II. XIII. † Fig. II.

trémité du collier ; d'où l'on voit que la premiere couche de coquille qui eſt tracée par l'extrémité de ce collier, doit être de couleur différente de celles des raies. Mais comme l'accroiſſement de l'animal fait que les raies du collier ſe trouvent ſous cette premiere coquille, pendant qu'elle eſt encore très-mince, & par conſéquent tranſparente, elle n'empêche point que la coquille qui eſt produite ſous elle ne paroiſſe noire dans les endroits où elle l'eſt : mais lorſque l'animal a ceſſé de croître pendant quelque tems, il augmente alors l'épaiſſeur de cette coquille produite par l'extrémité du colier ; de ſorte que la coquille, que les raies du colier produiſent ſous cette derniere quand l'animal recommence à croître, ſe trouvant poſée ſous un morceau de coquille beaucoup plus épais & moins tranſparent, la couleur de ces raies y paroît beaucoup moins ; & ainſi elle doit être differente dans ces endroits de celle du reſte de la raie.

La figure de certaines coquilles eſt ce qui pourroit paroître à preſent de plus difficile à concilier avec la maniere dont nous avons vû qu'elles croiſſent. C'eſt auſſi la 2e difficulté que je me ſuis propoſé d'éclaircir. Ce qui me paroît y avoir de plus embaraſſant pour accommoder l'accroiſſement des coquilles par *juxtapoſition* avec leurs figures, peut ſe réduire à quatre choſes. 1°. Comment il ſe peut faire, que la courbure de certaines coquilles change en certains endroits, ou, pour m'expliquer plus clairement, comme peuvent être produites certaines coquilles dont la courbure, après s'être étenduë quelque tems en dehors, revient ſur elle-même. La figure 10e eſt la ſection tranſverſale d'une de ces

for-

sortes de coquilles. On y peut voir qu'après que cette coquille a tourné depuis *a* selon les lettres *ccc* jusques en *eee*, elle rebrousse chemin en *ddd*. Une simple apposition de parties sembleroit devoir continuer la même courbure. 2°. Comment se produisent les cornes qu'on voit sur certaines coquilles. J'appelle cornes, certaines éminences qui sont sur quelques especes de coquilles, qui ressemblent assez par leur figure aux cornes de quelques animaux. On les voit ces eminences fig. 9e & 10e marquées par les lettres *ccc*. 3°. De quelle maniere peuvent être produites les canelures qui ornent la surface extérieure de certaines coquilles pendant que leur surface intérieure est polie ; car pourquoi ces coquilles sont-elles plus épaisses dans toute leur longueur en certains endroits que dans d'autres : telles sont celles des fig. 12e, 13e, 14e. 4°. Comment enfin se fait une cavité avec laquelle le corps de l'animal ne communique point & qui regne tout du long de la rampe de la coquille. Elle est marquée fig. 2e par la lettre *e* qui va la rencontrer par une ligne ponctuée.

Les coquilles des Limaçons terrestres nous fourniront encore une réponse à la premiere de ces difficultez. * Le dernier degré d'accroissement de ces coquilles est une espece de rebord d'une ligne de largeur ou environ qui tourne en dehors au lieu que le reste de la coquille tourne en dedans : lorsque ce rebord est formé, ces coquilles ne croissent plus, c'est leur dernier periode. Ceux qui n'auroient point vû de coquille de Limaçons sans un pareil rebord, paroîtroient conclurre avec beaucoup de fonde-

* FIG. L.

ment que ces coquilles ne peuvent être produites par une ſimple juxtapoſition ; car elles devroient alors tourner dans un ſens contraire à celui où elles tournent ; mais lorſque l'on conſidére des coquilles de Limaçons de differens âges, on ne leur veut point de tel rebord, ce qui fait évanouïr toute la difficulté ; car la même choſe arrive ſans doute aux coquilles telle qu'eſt celle de la fig. 10e. Ce rebord eſt de la même couleur que les raies dans les petits Limaçons raiez (*fig.* 6.), auſſi l'extrémité du colier eſt-elle de même couleur que la peau qui forme les raies, comme on peut le voir dans la fig. 5e.

La courbure de la coquille ne peut changer, que celle du corps de l'animal qui lui ſert de moule ne change : il eſt aiſé d'imaginer des cauſes probables d'un tel changement ; apparemment que dans l'accroiſſement des Limaçons, par exemple, il arrive que les fibres exterieures du collier ne croiſſent pas dans la même proportion que les intérieures, par conſéquent qu'elles retirent le colier du Limaçon vers elles & l'obligent de ſe recourber en dehors.

Comme la difference de la longueur des fibres du colier nous fait aiſément comprendre de quelle maniere il arrive qu'il ſe recourbe en dehors ; auſſi pourrons-nous voir aſſez clairement en faiſant attention à la differente longueur de ces fibres, comment il peut ſe faire que le corps de divers animaux tourne en ſpirale. Car ſi l'on conçoit que dès la production de ces animaux les fibres d'une certaine ſurface de leurs corps ſont plus longues que celles de la ſurface qui lui eſt oppoſée ; il eſt clair que le corps ſe recourbera de maniere que la ſurface dont les fibres.

fibres ſont les plus courtes formera le concave de la courbure, & la ſurface dont les fibres ſont les plus longues formera le convexe. Ce qui ſuffira pour faire décrire au corps de l'animal une ſpirale, parce qu'il ne pourra croître qu'il ne ſe replie toûjours ainſi ſur lui-même, ſi les fibres plus longues & plus courtes croiſſent dans la même proportion. Il eſt vrai que dans le cas dont nous venons de parler, il décriroit ſeulement des ſpirales dont les differens tours ſeroient preſque ſur le même plan, & peu d'animaux ont leur coquille ou le corps qui leur ſert de moule tourné ainſi: les differens tours des ſpirales de leurs corps ou de leurs coquilles ſont ſur differens plans; mais avec une ſuppoſition de plus, on concevra également comment ſe forment ces dernieres ſpirales. Outre les deux ſurfaces dont nous avons ſuppoſé que les fibres de l'une ſont plus longues que les fibres de l'autre, il faut encore imaginer deux autres ſurfaces directement oppoſées, chacune deſquelles eſt compriſe entre les deux précédentes, mais plus petites qu'elles; & que ces deux dernieres ſurfaces ſont auſſi formées de telle ſorte que les fibres de l'une ſont toutes plus longues que les fibres correſpondantes de l'autre. Ce qui obligera encore le corps de l'animal de s'incliner d'un côté, & qui fera former à ſon corps des ſpirales tracées ſur differens plans.

S'il arrivoit aux Limaçons terreſtres de produire un rebord ſemblable à celui qui eſt leur dernier terme d'accroiſſement après la formation de chaque quart de tour de ſpirale que fait leur coquille, & que leurs fibres exterieures ſe relâchant après, ils produiſiſſent un autre quart de coquille recourbé dans le premier ſens, après

quoi ils produiſiſſent encore un nouveau rebord & ainſi de ſuite; leur coquille ſeroit d'eſpace en eſpace marquée par de pareils rebords qui lui feroient un petit ornement. * C'eſt par un art ſemblable que ſont formées diverſes eſpeces de coquilles de Limaçons marins qui paroiſſent merveilleuſement travaillées. Ce ſont divers petits rebords de la coquille diſpoſez d'eſpaces en eſpaces qui l'ornent de maniere, qu'il ſemble que la Nature ait pris plaiſir à la ſculpter.

† Les cornes que l'on voit ſur pluſieurs eſpeces de coquilles ſont auſſi produites par la même méchanique que le reſte de la coquille. Certains tubercules charnus qui viennent ſur le corps des poiſſons qui les habitent, leur ſervent de moules, & ſelon qu'il ſe forme plus ou moins de ces tubercules pendant que l'animal croît d'un tour de ſpirale, il y a plus ou moins de ces cornes dans le même tour; elles ſont creuſes lorſque ces tubercules ſont reſtez ſur le corps de l'animal pendant tout le tems qu'il a vécu. Elles ſont en partie creuſes & en partie ſolides, lorſque ces tubercules ne ſe ſont diſſipez qu'en partie, & enfin abſolument ſolides lorſque ces tubercules ſe ſont abſolument diſſipez pendant la vie de l'animal.

On doit ramener à la même formation & à celle des rebords, certaines éminences beaucoup plus petites, que leur figure peut faire nommer aſſez proprement épines; elles ſont ordinairement à la fin des termes d'accroiſſement ſenſibles de ces coquilles; ce qu'on peut remarquer fig. 13e.

Les canelures qui paroiſſent ſur la ſurface ex-

* FIG. XI. XII. † FIG. IX. X.

extericure des coquilles pendant que leur ſurface interieure eſt très-polie, ne donneront pas plus d'embarras à expliquer. Il me ſuffira de dire que toute l'extrémité du contour du corps de l'animal eſt cannelée ; auſſi voit-on la coquille cannelée dans ſa ſurface interieure juſques à quelque diſtance de ſon extremité. * Mais comme le reſte de la ſurface du corps de l'animal qui les habite eſt polie & molle, l'animal croiſſant, & la partie de ſon corps qui n'eſt pas cannelée venant à correſpondre à celle de la coquille qui eſt cannelée, ce que cette partie fournit pour la coquille ſert à boucher les cannelures intérieures, & la coquille ſe trouve ſeulement cannelée ſur ſa ſurface exterieure, excepté les ſeules premieres lignes de la largeur de ſa ſurface interieure.

† Il eſt une coquille de mer plate comme les huitres, aſſez ſemblable aux coquilles de *S. Jacques*, dont la formation paroîtroit difficile ſi nous ne venions de voir comment ſe font les cannelures des autres coquilles, elle eſt elle-même cannelée; mais les deux côtez des cannelures ſont de petits canaux renfermez de coquilles de tous côtez, & percez depuis le ſommet de la coquille juſques à ſon extrémité ; il eſt aiſé de voir comment ſe forment ces petits canaux ; il ſuffit de concevoir que la premiere extrémité du corps du poiſſon eſt profondément cannelée, mais que le reſte de ſon corps eſt très-uni & d'une ſubſtance aſſez dure pour ne pouvoir pas entrer dans la cannelure formée par l'extrémité ; de ſorte que le reſte du corps produit ſeulement quelques feuilles de coquilles qui s'appliquent ſur cette cannelure ſans la boucher intérieurement.

* Fig. XII. XIII. XIV. † Fig. XIV.

térieurement; ainſi il doit reſter un canal tel que nous venons de le dépeindre.

Avant d'expliquer enfin comment ſe forme la cavité qui regne tout du long de la rampe de certaines eſpeces de coquilles, & avec laquelle le corps de l'animal ne communique point, il eſt bon de dire ce que nous entendons par rampe. Pour s'en faire une idée nette, il faut prendre garde, que lorſque le colier de l'animal trace les differens tours de ſpirale de coquille, que la partie de la ſurface exterieure qui eſt la plus proche de l'axe autour duquel il tourne, forme des ſpirales dont le diametre ou la largeur eſt plus petite que celle des ſpirales décrites par d'autres points de ce colier; or on appelle rampe de la coquille cette partie qui eſt formée par les ſpirales de la moindre largeur ou des plus petits diametres. La rampe des eſcaliers peut donner une idée ſenſible de celle des coquilles.

Pour développer à préſent le myſtére de la formation du trou qui eſt le long de la rampe, il faut d'abord remarquer que la ſurface ſuperieure du colier de l'animal eſt de figure convexe & ſa ſurface inferieure de figure concave; ce qui eſt évident puiſque la premiere eſt poſée ſous le concave de la coquille, & la ſeconde ſur le convexe. * Or la ſurface ſuperieure du colier étant toûjours découverte par l'accroiſſement de l'animal, c'eſt auſſi toûjours elle qui forme la nouvelle coquille, & la partie de la ſurface ſuperieure de ce colier qui trace des ſpirales des plus petits diamétres, eſt auſſi celle qui produit la rampe de la coquille. Si on veut à preſent imaginer que le colier de l'animal s'avance & s'étend pour produire un nouveau morceau.

* Fig. II.

ceau de coquille & par conſéquent un nouveau morceau de la rampe ; comme l'animal eſt entortillé dans toute ſa coquille, on doit concevoir en même tems qu'une certaine partie de ſon corps s'avance & s'entoure autour d'une partie de la rampe à laquelle elle n'avoit pas encore été appliquée ; cette partie qui s'applique ainſi à un nouvel endroit de la rampe eſt celle où la ſurface inférieure du collier fait un angle avec ſa ſurface ſuperieure. Or ſi on imagine que cette partie de l'animal n'eſt ni aſſez courbe ni aſſez flexible pour ſe mouler parfaitement ſur la partie de la rampe où elle s'eſt recemment appliquée, il eſt clair qu'il reſtera un petit eſpace vuide, renfermé entre la rampe, une portion du corps de l'animal, & un petit morceau de l'ancienne coquille qui ſe trouve entre cette portion du corps, & la rampe. La petite partie qui contribuë à renfermer ce trou n'étant pas couverte de coquille, laiſſera échaper de la liqueur propre à la former, & par la production de ce nouveau petit morceau de coquille, le petit trou ſe trouvera entouré de tous côtez, & on voit bien que ce trou doit regner tout du long de la rampe, parce que la coquille ne peut croître ſans qu'il ſe forme.

Si la petite partie qui aide à renfermer le trou, laiſſe échaper de la liqueur très-abondamment, alors il arrivera que le trou deviendra abſolument ſolide étant bouché par la nouvelle coquille. C'eſt auſſi ce qui arrive à pluſieurs coquilles de mer, dont les rampes ſont beaucoup plus épaiſſes qu'elles ne ſembleroient devoir être.

Si la Courbure de la rampe diminuë aſſez pour donner la facilité au corps de l'animal de ſe

ſe mouler deſſus, lorſque cette coquille a fait un certain nombre de ſpires ; il eſt clair qu'il ne doit plus alors ſe former de trou, & que celui qui eſt formé doit ſe boucher vers ſa ſurface ſuperieure. C'eſt auſſi ce qui arrive aux Limaçons qui ſont parvenus à leur dernier degré d'accroiſſement ; ou dont le rebord de la coquille eſt formé, ce qu'on peut voir dans la fig. 6e. La petite coquille qui y eſt repreſentée a un rebord marqué *bbb*, & le trou qui paroîtroit en *e* ſi elle n'étoit pas parvenuë à ſon terme d'accroiſſement, eſt bouché à cauſe qu'elle y eſt parvenuë. La même choſe arrive aux gros Limaçons, & on ne voit les trous marquez *e* (*fig.* 2e. & 3e.) ſur la rampe de leur coquille, que parce qu'ils n'étoient pas parvenus à leur dernier degré d'accroiſſement, ſans quoi ces trous ſeroient couverts par-deſſus comme dans la fig. 6e.

Lorſque le colier de l'animal trace les differentes lignes ſpirales de la coquille autour d'un petit cône, il eſt clair qu'il doit reſter un petit eſpace vuide de figure conique au milieu de la coquille, c'eſt à dire qu'on doit voir un petit eſpace vuide autour duquel ſont poſez les divers tours de la coquille. Pluſieurs eſpeces de coquilles de mer, (telle eſt celle de la fig. 7.) & diverſes eſpeces de Limaçons terreſtres ont une pareille ouverture conique.

Si le ſommet du cône autour duquel le colier de l'animal tourne eſt à l'origine de la coquille, on voit bien que ce trou doit ſe terminer à la pointe de la coquille qui le bouche en cet endroit ; tel eſt le trou des coquilles de Limaçon dont je viens de parler & de celui de la fig. 7. il finit où la coquille commence ; mais

ſi

ſi le ſommet de ce cône eſt par-delà l'origine de la coquille, elle doit être entierement percée ; pluſieurs coquilles de mer ſont faites de cette derniere maniere.

Enfin ſi l'on conçoit que le colier de l'animal tourne autour d'un ſolide de figure courbe au lieu du cône dont nous avons parlé ci-deſſus, & que le ſommet de ce ſolide ſoit à l'origine de la coquille, il eſt encore évident qu'il ſe formera dans la coquille un trou de la figure de ce ſolide.

Si l'animal qui habite une pareille coquille, forme tout du long de la rampe de cette coquille un trou tel que les gros Limaçons des jardins en forment un le long de la leur, comme nous l'avons vû ci-deſſus ; cette coquille ſera percée de deux trous differens dans toute ſa longueur *, & aura deux longues ouvertures avec leſquelles le corps de l'animal ne communiquera point.

Ces deux trous peuvent auſſi quelquefois être produits de la même maniere que celui qui regne le long de la rampe, il n'eſt beſoin pour le concevoir que d'imaginer que la partie qui occupe enſuite la place de celle qui a formé le trou, parce qu'elle ne pouvoit pas ſe mouler ſur la rampe, que la partie, dis-je, du corps de l'animal qui ſuccéde à celle-ci, ne peut pas exactement ſe mouler ſur la coquille qu'elle a produite.

Un long ouvrage ſuffiroit à peine pour épuiſer tout ce que les figures des coquilles ont de ſingulier ; mais je me ſuis preſcrit des bornes plus étroites, & je l'ai fait d'autant plus volontiers qu'on peut toûjours amener la formation

* FIG. X.

tion de ce qu'elles ont de plus extraordinaire à celle de quelques-unes des choſes dont nous venons de parler.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA Figure 1re. repréſente une coquille de gros Limaçon de jardin qu'on a caſſée en deux endroits differens. Les lettres *aaa* marquent le contour des trous qu'on lui a faits. On y voit ces trous bouchez par de nouveaux morceaux de coquille poſez immédiatement ſous l'ancienne. Il eſt à remarquer que cette nouvelle coquille n'eſt pas colorée comme l'ancienne, qu'elle n'a pas auſſi diverſes petites lignes, qu'on peut appeller, quoiqu'improprement à cauſe de leur figure, fibres de la coquille, leſquelles fibres ſont diſtinctement marquées ſur l'ancienne.

Fig. 2e. Les lettres *aaa* marquent le contour d'une ouverture faite à la coquille. *i* eſt un morceau de peau de cannepin, appellée vulgairement Peau de poule, qui bouche cette ouverture; cette peau eſt collée à la ſurface interieure de la coquille. *b* repreſente la nouvelle coquille qui s'eſt formée ſur la ſurface du cannepin qui touchoit le corps du Limaçon.

dd eſt le contour de l'ouverture de la coquille qui n'eſt point rebordé comme celui de la fig. 1re.

e marque par une ligne ponctuée l'ouverture d'un trou qui regne tout du long de la rampe de la coquille juſques à ſon ſommet, ou ſa pointe *p*.

cc eſt un des termes notables de l'accroiſſement

ment de la coquille. On y voit les raies preſque interrompuës ou foiblement tracées.

Fig. 3e. eſt la coquille d'un gros Limaçon de jardin, dont le contour de l'ouverture alloit juſques en *a*, mais qu'on a caſſée de maniere en ſuivant tout le tour de cette ouverture qu'elle a été terminée par les lettres *bcc. ccc* eſt un morceau de cannepin, qui paroît ici collé ſur la ſurface exterieure de la coquille, mais qu'on doit auſſi concevoir collé ſur la ſurface interieure de la même coquille; de façon qu'il envelope tout le bord de la coquille, qui eſt par conſéquent renfermé entre les deux extremitez de ce morceau de cannepin. *edddq* marquent la nouvelle coquille qui a été produite, qui a été ſéparée de l'ancienne par l'épaiſſeur de la peau du cannepin ſur laquelle elle eſt appliquée.

Fig. 4e. repreſente la coquille d'un petit Limaçon, qui eſt ſorti de ſon œuf depuis peu de tems.

Fig. 5e. eſt celle d'un petit Limaçon de jardin qui porte une coquille, ſur laquelle ſont peintes cinq raies noires ou brunes; les intervales qui ſont entre ces raies ſont de couleur citron. Ce Limaçon paroît dépouillé d'une partie de ſa coquille qui alloit autrefois juſques en *aaa*, & qui eſt à preſent terminée en *bb*, ce qu'on a fait à deſſein de faire voir le colier de ce Limaçon, qui eſt auſſi lui-même marqué de cinq raies *ccccc* de couleur brune, mais moins foncée que celle de la coquille: l'origine de ces raies eſt à quelque petite diſtance de l'extrémité du colier; & elles n'ont ordinairement qu'une ligne ou deux de longueur. L'eſpace qui eſt entre ces raies, & celui qui eſt entre leur extrémité la plus proche du bord

du

du colier & ce même bord de colier *aa*, eſt de couleur beaucoup plus claire que celle du reſte de la peau, qui eſt depuis l'extrémité des raies *ccccc* la plus éloignée de *aaa* juſques au ſommet *p* de la coquille.

Le bord *aaa* du colier de l'animal eſt de couleur un peu brune.

Fig. 6e. eſt auſſi une coquille raiée, mais qui avoit ſeulement trois raies. On a fait deux trous à cette coquille, dont le plus éloigné du colier eſt marqué *a*, & le plus proche *dcc*. La coquille qui s'eſt formée pour boucher le trou *a* eſt de couleur differente de celle des raies & de celle de leurs intervalles. Mais celle qui a bouché le trou *dcc* eſt de même couleur que l'ancienne; enſorte que les raies noires ſont continuées en *cc*, & que *d* eſt de couleur citron. Ce dernier trou eſt pourtant peint ici un peu moins près qu'il ne devroit être du bord de la coquille.

bbb marquent le rebord de cette coquille, qui étoit parvenuë à ſon dernier degré d'accroiſſement. Ce rebord eſt de couleur brune; auſſi a-t-on vû (*fig.* 5e.) que l'extrémité du bord du colier de l'animal eſt brun. L'origine des raies de la coquille n'eſt point à ce rebord, comme l'origine des raies du colier (*fig. précedente*) n'eſt point à l'extrémité de ce colier.

e marque la coquille qui bouche alors la cavité qui eſt le long de la rampe.

Fig. 7e. repreſente une coquille appellée la Veuve; elle eſt marquée de diverſes taches noires, de figures irrégulieres, & poſées irrégulierement ſur un fond blanc.

On voit en *a* un trou qui va juſques au ſommet

met de la coquille. Ce trou eſt formé bien differemment de celui des fig. 2e. & 7e.

Fig. 8e. eſt une eſpece de turbinites, ſur laquelle on voit divers petits quarrez qui ſont de couleur rouge, diſpoſez dans une proportion aſſez réguliere.

Fig. 9e. eſt la coupe d'une coquille, dont la queuë de l'animal a été obligée d'abandonner les premiers tours, parce qu'ils ſont devenus entierement ſolides. Les lettres *aaaaaa* marquent les eſpaces qui étoient autrefois occupez par le corps de l'animal, & qui ſe ſont remplis dans la ſuite. On voit auſſi qu'une partie de l'eſpace *eb* eſt devenuë ſolide, ſavoir celle qui eſt marquée *e*, le corps de l'animal n'occupoit plus que les eſpaces *bb*, *ddddd*, &c.

cccc ſont de ces éminences de coquilles que j'ai appellées cornes, ou des coupes de ces éminences.

Fig. 10e. eſt la coupe tranſverſale d'une coquille, qui après avoir fait un certain nombre de tours de ſpires juſques en *cccc* dans un ſens, rebrouſſe chemin en *ddd*.

aa ſont deux trous qui ſont dans toute la longueur de la coquille, avec leſquels le corps de l'animal ne communique pas, qui occupe les eſpaces *bbb* &c.

ccc ſont des éminences ou petites cornes.

Fig. 11e. eſt une eſpece de turbinites qui paroît artiſtement travaillée. Cet ornement lui vient de divers rebords tels que le dernier *aaa* diſpoſez d'eſpace en eſpace.

Fig. 12e. a auſſi divers rebords comme la précédente. Mais on peut remarquer de plus que chacun des rebords eſt cannelé.

bb eſt la ſurface interieure de la coquille, qui

qui eſt polie, quoique les rebords ſoient canelez.

Fig. 13e. eſt une coquille dont la ſurface extérieure eſt canelée, quoique ſa ſurface intérieure ſoit polie.

cc, *ccc*, *ddd*, ſont trois termes d'accroiſſemens très-ſenſibles, dont le dernier *dddd* eſt orné de diverſes petites éminences que j'ai nommées points à cauſe de leur figure.

Fig. 14e. eſt auſſi une coquille cannelée, mais qui a cela de particulier, que chacun des côtez des canelures ſont eux-mêmes de petits canaux, c'eſt-à-dire qu'il reſte des eſpaces vuides au milieu de ces côtez dans toute leur longueur, & que ces trous ſont entourez de coquille de maniere que le corps de l'animal n'entre point dedans. On a ouvert un de ces canaux marquez *b*, *dd*, *aa*, *cc*. On voit que la ſurface interieure *dd*, qui eſt appliquée ſur le corps de l'animal, ſe termine en *aa*, c'eſt-à-dire que ces longs trous ne ſont pas renfermez depuis *aa* juſques à l'extrémité *cc* dans laquelle le corps de l'animal entre.

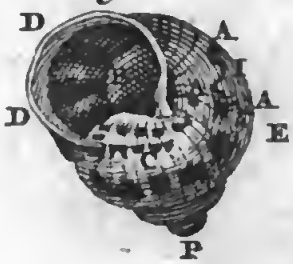
CONJECTURES ET REFLEXIONS

Sur la matiere du Feu ou de la Lumiere.

PAR M. LEMERY le fils.

LA matiere du Feu eſt le premier & le plus puiſſant diſſolvant des corps terreſtres;

Fig. 2.



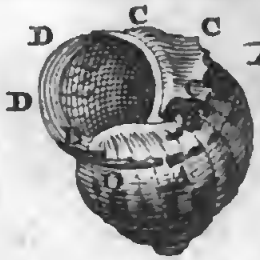


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 6.

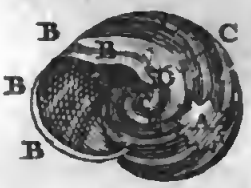


Fig. 7.

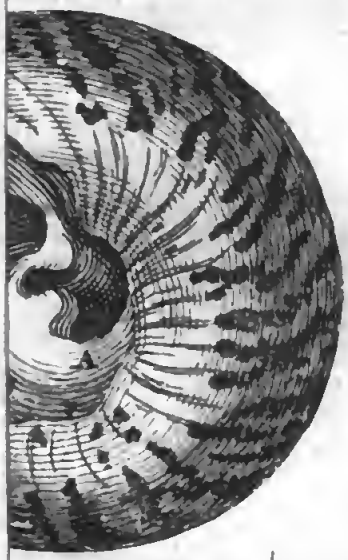


Fig. 8.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

nous n'avons aucun agent qui y pénetre auſſi profondément, & qui en deſunisse auſſi parfaitement les ſubſtances eſſentielles.

C'eſt donc à cette matiére que le Chimiſte eſt redevable des ſecrets qu'il arrache à la Nature, & qu'elle ne lui reveleroit jamais, ſi elle n'étoit forcée, & miſe pour ainſi dire, à la queſtion par un diſſolvant auſſi actif.

Une matiere qui contribuë ſi fort à nous faire connoître les autres corps, mérite bien de nous occuper à ſon tour, & d'exciter nôtre curioſité ſur les proprietez qui lui ſont particulieres.

On ne peut diſconvenir qu'elle ne ſoit le principe veritable de la chaleur, de la lumiere, & même de la fluidité ou de la fuſion de pluſieurs corps terreſtres, qui ſans le mélange & l'action de cette matiere, conſerveroient toûjours une forme ſolide. Mais elle n'eſt pas toûjours aſſez abondante, ou elle ne trouve pas toûjours des corps qui lui réſiſtent aſſez peu pour les mettre ſi facilement en fuſion; on remarque même ſouvent qu'au lieu de les fondre, ou de les entretenir dans la fluidité qu'elle leur avoit d'abord communiquée, elle s'y engage & s'y envelope de maniere qu'elle y demeure empriſonnée, & qu'elle n'en ſort que quand une cauſe étrangere vient à ſon ſecours, & ouvre exterieurement les celules qui la retenoient.

Il y a encore deux circonſtances remarquables dans cette matiere enfermée; c'eſt 1°. qu'elle augmente quelquefois très-ſenſiblement la peſanteur du corps qui la contient; & en ſecond lieu, qu'elle conſerve pendant tout le tems de ſa captivité, les proprietez particulie-

res de matiere de feu, dont elle donne des marques évidentes quand on la met en état de s'échaper de sa prison, & d'aller faire son impression sur quelqu'autre corps.

Tout le monde ne convient pas de ce que je viens d'attribuer à la matiere du feu. On prétend même que ce sentiment repugne à l'idée qu'on doit avoir de ce qui constituë la nature propre de cette matiere; cependant il est appuié sur tant & de si solides experiences que plusieurs Chimistes du premier ordre n'ont pû se dispenser de l'adopter. Pour donner un nouveau jour à ce sentiment, & avoir un plus grand droit de le mettre en œuvre pour l'intelligence de quelques phénoménes que j'entreprens d'expliquer dans ce Memoire-ci & dans d'autres; je vais en rapportant les expériences qui lui servent de fondement répondre aux objections par lesquelles on tâche de le détruire, & qui malgré toute la vrai-semblance que les experiences lui donnent, ont encore assez de force pour faire douter de sa verité.

Tout le monde sait que quand on expose au feu plusieurs matieres métalliques telles que le Régule d'Antimoine, le Plomb, l'Etain, & même le Mercure, quoique plusieurs de ces matieres perdent beaucoup de leur propre substance qui s'échape en l'air pendant l'operation, bien loin de peser beaucoup moins qu'auparavant, ce qui sembleroit devoir arriver, néanmoins elles pesent beaucoup davantage. On demande d'où peut provenir cette augmentation de poids, & la matiere du feu aiant réduit ces corps dans l'état de calcination où nous les voïons, ne doit-on pas aussi lui attribuer la pesanteur nouvelle qu'ils acquierent?

Peut-

Peut-être me dira-t-on, que cette augmentation de poids vient des acides du bois ou du charbon qui se sont introduits dans l'interieur de ces corps à la faveur des parties de feu, & qui y sont restez pendant que les parties de feu s'en sont échapées.

Mais il est bien difficile que ces acides parviennent en assez grande quantité jusqu'au corps mis en calcination, pour y produire toute l'augmentation de poids qu'on y découvre ensuite, & qui va quelquefois à un dixiéme comme M. *Homberg* l'a remarqué. Et en effet avant que ces acides atteignent la matiere exposée au feu, il faut qu'ils traversent les parois du vaisseau qui contient cette matiere, & qui certainement ne donne pas un passage libre à ces acides, puisque les vaisseaux dont on a coûtume de se servir dans ces sortes d'operations pourroient contenir les plus forts acides sans les laisser échaper au travers de leurs pores. Si donc malgré la difficulté du passage quelques acides du bois trouvent le secret de traverser à la faveur des parties de feu, les pores dont il s'agit, cette même difficulté est une preuve, qu'ils passent en petit nombre, & même que la plus grande partie de ces acides est arrêtée, & retenuë par les parties mêmes du vaisseau qui ordinairement est d'une nature à les pouvoir absorber. La matiere du feu au contraire passant librement & en abondance au travers de toute sorte de vaisseaux comme l'expérience le démontre; c'est particuliérement sur son compte que doit être mise l'augmentation dont il s'agit, & qui étant souvent fort considérable, suppose une cause abondante, & telle que la seule matiere du feu le peut être en cette occa-

sion. Enfin ce qui prouve encore plus clairement que cette matiere peut augmenter le poids de plusieurs corps en s'y engageant, c'est que si on expose ces mêmes corps aux raions du Soleil réunis par le verre ardent, leur pesanteur n'augmente pas moins que s'ils eussent été exposez au feu ordinaire; or en ce cas-ci on ne peut point avoir recours aux acides du bois & du charbon, & quelque supposition que l'on fasse, il est bien difficile d'ôter à la matiere du feu, la part qu'elle a dans ce phénomene.

Il ne suffit pas d'avoir prouvé que la matiere du feu s'insinuë dans certains corps, & en augmente le poids, il s'agit encore de faire voir que cette matiere en se logeant dans ces corps, ne change point de nature, & y conserve toûjours les proprietez particulieres qui la constituent matiere de feu. La preuve de ce second article me paroît être une confirmation du premier; car si ce qui s'introduit dans les corps pendant leur calcination, est une matiere veritable de feu, dès qu'on concevra évidemment que cette matiere s'y engage effectivement, & y réside avec les mêmes proprietez qu'elle avoit avant son empriſonnement, on accordera aisément ensuite que c'est elle qui fait la principale augmentation de leur poids.

La matiere du feu qui s'est engagée dans les corps métalliques, y est si fort cachée & si bien retenuë, qu'elle ne se peut manifester à nous bien sensiblement par aucuns des signes propres qui la font reconnoître, & qui la distinguent de toute autre matiere. La raison en est que pour se faire appercevoir, il faudroit qu'elle forçât les portes de sa prison, & qu'elle vînt faire sur quelqu'autre corps l'impression dont elle

elle eſt capable. Mais elle eſt retenuë par des cellules ſi fortes & ſi ſolides, qu'il ne lui faut pas moins qu'un feu de fuſion pour détruire ces cellules, & pour dégager les parties de feu qui y étoient enfermées, & qui ſe confondant avec celles qui les ont tirées de captivité, ne permettent pas au Phyſicien de verifier leur nature particuliere, & ſi elles ſont effectivement des parties de feu.

Il n'en eſt pas de même de celles qui ſe ſont inſinuées dans les corps pierreux ou ſalins par le ſecours de la calcination : car ces corps étant beaucoup moins ſolides, l'eau ſuffit pour ouvrir exterieurement à la matiere du feu, des iſſuës libres ; & cela parce qu'en choquant rudement les parties de ces corps, non ſeulement elle vient à bout d'en déranger l'union, mais elle les réduit encore en une pouſſiere très-fine qui devient propre à être entierement ſuſpenduë dans le liquide, ſi les corps ſont ſalins ; ou qui s'y ſoûtient en partie ſi les corps ſont pierreux. L'eau de chaux, par exemple, n'eſt deſſicative & abſorbante que par les parties pierreuſes dont elle s'eſt chargée, & la chaux détrempée par l'eau, n'eſt ſi convenable dans les ouvrages de maçonnerie où on l'emploie, que parce que ſes parties aiant été fort attenuées par le liquide, elles ſe réuniſſent enſuite ſi intimement les unes aux autres, qu'elles forment enſemble une maſſe compacte & durable.

Si donc l'eau deſunit ſi bien toutes les parties des corps ſalins & pierreux calcinez, & ſi elle les broie ſi ſubtilement ; ſuppoſé qu'il y ait de la matiere de feu engagée, & reſſerrée entre ces parties, elle doit s'échaper à la faveur de cette deſunion ; c'eſt auſſi ce qu'elle

fait ; car elle se rend dans le liquide aqueux à qui elle doit sa délivrance, & qui en est plus ou moins échauffé suivant la quantité de cette matiere.

Il arrive encore un effet considerable dans quelques-uns de ces corps calcinez ; c'est que comme ils font souvent une très-ample provision de matiere de feu, & que la moindre cause est capable de la leur faire perdre : quand on les applique sur les chairs, les parties de feu qui s'échapent de ces corps & qui s'introduisent dans le tissu de la partie, la brûlent & y font un escare qui ne differe guere que du plus au moins, de la brûlure produite par un charbon ardent ou par un fer chaud.

La facilité qu'il y a d'expliquer les effets qui viennent d'être marquez, en supposant des parties de feu toûjours agissantes, donne un grand préjugé en faveur de la supposition ; mais ce qui la rend parfaitement solide, c'est l'examen de la maniere dont les corps calcinez deviennent propres aux effets qu'on leur voit faire. Ils n'acquierent ces proprietez qu'en conséquence de leur calcination, ou de leur exposition à la matiere même du feu ; & ce qui est à remarquer, ces proprietez sont les mêmes que celles du feu ; cela étant, y a-t-il rien de plus vraisemblable & de plus naturel, que d'attribuer ces effets aux parties mêmes du feu qui ont été retenuës dans ces corps, & qui trouvant ensuite le moien d'en sortir, vont faire leur impression sur ceux qui s'offrent à leur passage ?

Ajoûtez à tout ce qui vient d'être dit, qu'il est impossible par toute autre supposition de rendre aucune raison satisfaisante des phénomenes dont il s'agit. Car si l'on prend un exem-

ple

ple particulier, quand la chaux plongée dans l'eau échauffe ce liquide, & le fait bouillir à peu près comme feroit du feu, attribuëra-t-on cet effet à quelques principes fermentatifs contenus dans la chaux, & qui sont mis en action par l'eau ? mais on ne trouve dans la chaux qu'une pure terre dégarnie de tous sels depuis la calcination, & dont il semble que le feu ait chassé tout autre corps pour en occuper la place. Or comment une pure terre détrempée par l'eau, viendra-t-elle à bout de l'échauffer ? c'est ce qu'il est impossible de concevoir sans la supposition des parties de feu. Pourquoi donc cette supposition malgré les preuves déja alleguées trouve-t-elle encore des contradicteurs ? Le voici.

Les parties de feu, dit-on, ne sont telles qu'à cause du mouvement rapide dont elles sont agitées. Or quand on passeroit qu'elles peuvent être engagées dans le tissu des corps grossiers, elles y perdroient bientôt le mouvement qu'elles y auroient apporté, & cessant par-là d'être parties de feu, elles deviendroient incapables des effets que je leur attribuë. Par conséquent il faut avoir recours à quelqu'autre cause pour expliquer ces effets.

Je répons que la matiere de feu doit être regardée comme un fluide d'une certaine nature, & qui a des proprietez particulieres qui le distinguent de tout autre fluide. Je consens que ces proprietez dépendent de la rapidité avec laquelle toutes les parties de ce fluide se meuvent; mais je crois aussi que la figure de chacune de ces parties doit necessairement entrer en ligne de compte. Quoiqu'il en soit, quand ce fluide a été arrêté dans le tissu de quelque matiere

groſſiere, comme il n'eſt pas de pire condition que tous les autres fluides que nous connoiſſons, il doit avoir le même ſort. L'eau, par exemple, eſt un liquide dont la fluidité, comme il ſera dit dans la ſuite, dépend de la matiere du feu, & par conſéquent dont la fluidité eſt bien inferieure à celle de cette matiere. Cependant l'eau s'enferme tous les jours dans une infinité de corps, ſans qu'on puiſſe dire qu'elle y perde ſa fluidité, ni aucune des proprietez qui la caracteriſent. Enfin quand on l'en fait ſortir, elle ſe retrouve avec ces mêmes proprietez eſſentielles qui ne l'ont pas quittée un moment. A plus forte raiſon nôtre matiere doit-elle dans la même ſituation conſerver auſſi les ſiennes, & ſe retrouver après ſa ſortie, telle qu'elle étoit auparavant.

Mais, me dira-t-on, il ne s'agit pas ici de comparaiſon, il s'agit de faire voir ſans cela, comment les parties de feu retenuës dans un corps groſſier y peuvent conſerver leur mouvement; c'eſt auſſi ce qui ſera expliqué dans la ſuite après avoir ſatisfait à l'objection ſuivante, dont la réponſe conduit naturellement à cet éclairciſſement.

On n'a pas de peine à concevoir qu'un fluide groſſier, & dont les parties ſont médiocrement agitées, ſoit arrêté dans le tiſſu d'un corps ſolide. Mais on ne conçoit pas de même, qu'une matiere auſſi ſubtile & auſſi active que l'eſt celle de feu, ne trouve pas dans le corps où elle s'eſt introduite, quelqu'iſſuë pour s'échaper, ou qu'elle ne s'en faiſe pas une par la rapidité de ſon mouvement.

Je répons, que pour ce qui regarde l'activité de la matiere du feu, elle eſt certainement très-

très-grande, & que quand cette matiere se trouve en une quantité suffisante pour forcer la résistance d'un corps solide, elle se fait jour au travers en rompant l'union de toutes ses parties; mais elle n'est pas toûjours assez abondante pour cela; & alors sa force étant inférieure ou égale à la résistance du corps solide qui l'envelope, l'activité & les efforts de cette matiere demeurent inutiles, s'ils ne sont aidez & secourus par quelque cause étrangere qui agisse exterieurement.

Quant à la finesse des parties de cette matiere, on ne peut disconvenir qu'elle ne soit très-considerable; mais il s'agit de savoir, si les pores des cellules dans lesquelles je suppose les parties de feu enfermées, ne sont pas encore plus petits que ces parties; comme nous n'avons point de microscopes assez fins, ni de mesures assez exactes pour vérifier ce qui en est, & que d'ailleurs il n'y a aucun inconvenient à supposer les pores dont il s'agit, plus étroits que les parties de feu ne sont fines & déliées; j'adopte d'autant plus volontiers cette supposition, qu'aiant d'ailleurs de fortes preuves que la matiere de feu peut être retenuë dans le tissu de plusieurs corps, cette supposition y convient parfaitement.

Au reste je ne prétens pas que les pores, au travers desquels la matiere de la lumiere ne sauroit passer, soient impraticables à toute autre matiere; car quelque déliées que soient les parties de feu, j'en puis concevoir encore de cent fois plus subtiles qui ne trouvent aucuns pores impénétrables, & dont la destination est peut-être de remplir tous les vuides de l'Univers; mais quoiqu'elles surpassent en finesse les par-

ties de la matiere du feu, je ne les crois pas pour cela auſſi propres que cette matiere, aux effets dont elle eſt reconnuë capable. Voici pourquoi.

Une des principales proprietez de cette matiere, c'eſt de diſſoudre & de mettre en fuſion les corps terreſtres, ce qu'elle fait en diviſant & déſuniſſant toutes leurs parties, & donnant à chacune l'agitation neceſſaire, pour que le tout ait une forme de liquide; mais la matiere ſubtile trouve un paſſage ſi libre au travers de tous les corps, qu'elle s'échape par les iſſuës qui lui ſont ouvertes de tous côtez, ſans faire une impreſſion auſſi vive ſur ces corps, que la matiere du feu, qui n'étant pas auſſi ſubtile que l'autre, & par conſéquent ne pouvant enfiler les mêmes routes, ſe trouve contrainte pour ſe faire un paſſage de forcer les obſtacles qui s'y oppoſent, & par-là de détruire le tiſſu naturel de ces corps.

Je pourrois fortifier ce raiſonnement de pluſieurs exemples ſenſibles; en voici un entr'autres qui vient aſſez bien au ſujet. Si l'on tend un rets dans une riviere à l'expoſition de ſon courant, les parties de l'eau paſſant facilement par les mailles ou les trous de ce rets ne l'endommageront point ou peu; mais s'il vient un corps qui ne puiſſe pas traverſer ces mailles, ou il s'arrêtera-là, ou il rompra le rets pour ſe faire un paſſage. C'eſt auſſi ce qui arrive à la matiere de la lumiere, qui ſuivant ſon abondance & ſa force, s'embaraſſe dans les corps ou les diſſout.

Pour concevoir à preſent ſans le ſecours de comparaiſon, comment la matiere du feu enfermée dans les cellules d'un corps ſolide peut

y conſerver ſon mouvement, il n'y a qu'à faire attention qu'une matiere plus ſubtile parcourt continuellement tous les pores de ces cellules, & par conſéquent entretient l'agitation de la matiere qui y réſide.

Monſieur *Saurin* nous a fait voir qu'on pouvoit ſuppoſer avec aſſurance & ſans crainte de contradiction bien fondée, que la matiere propre des corps les plus ſolides & les plus peſans, ne faiſoit pas la centmilliéme partie de leur volume. Sans prendre cette ſuppoſition à la rigueur, & en relâchant beaucoup de ſon étenduë, les corps ſolides donneront toûjours paſſage & habitation à une grande quantité de matiere étrangere ; & en ce cas la matiere plus ſubtile dont il a été parlé, y paſſant bien plus abondamment qu'on ne ſe le ſeroit imaginé, celle du feu quoiqu'empriſonnée, ne manquera pas de cauſes pour entretenir ſa fluidité & ſon mouvement.

Au reſte, quand je ſerois obligé d'accorder que les parties de feu engagées dans un corps ſolide n'y pourroient pas toûjours conſerver leur mouvement, il ne s'enſuivroit pas de-là qu'elles y perdroient auſſi leur nature propre de matiere de feu ; car ce n'eſt pas ſeulement à la rapidité de leur mouvement qu'elles doivent les proprietez qui leur ſont particulieres, c'eſt encore à leur figure & à leur tenuité. Par exemple, quand les parties d'eau ſont gélées, elles ſont en repos ; cependant on ne peut pas dire qu'elles ſoient en cet état eſſentiellement differentes de ce qu'elles étoient auparavant, puiſque la moindre agitation, ou la moindre chaleur les remet en poſſeſſion des effets auſquels la figure particuliere qu'elles conſervent, les

rend toûjours propres, & dont tout autre corps exposé à la même chaleur, ne seroit jamais capable.

On sait encore que le sel est la matiere des saveurs, & qu'il a de certaines proprietez qui sont dûës à la figure propre de ses parties; cependant il n'agit que quand il est dissous, ou, ce qui est la même chose, quand il nage dans un liquide qui tient ses parties en mouvement. Cela étant, dira-t-on que quand il n'est pas dissous, il n'est plus la matiere des saveurs, & qu'il n'a plus les proprietez qui caracterisent le sel en géneral? Il faudroit pour cela que ses parties eussent encore perdu leur figure essentielle, qui est la source principale de ces proprietez.

Par la même raison, quand il seroit vrai que l'engagement des parties de feu dans un corps solide leur enleveroit quelquefois leur mouvement, elles seroient alors dans le même cas que l'eau gêlée, & le sel en repos; c'est à dire qu'elles pourroient encore en regagnant du mouvement, reproduire leurs premiers effets.

On me demandera peut-être comment la matiere du feu, qui a bien pû penetrer dans un corps solide, n'en peut pas sortir de la même maniere, sans avoir besoin d'une cause étrangere qui facilite son évasion; car elle n'y est entrée, que parce qu'elle a trouvé des voies assez ouvertes pour cela; pourquoi donc ne ressort-elle pas par les mêmes issuës, ou par d'autres d'une égale grandeur?

Je répons, que tant que le corps est exposé au feu, cet agent ouvre & dilate ses pores, & y fait passer librement & continuellement plusieurs de ses parties qui en peuvent aussi ressor-

tir

tir ensuite avec la même liberté qu'elles y étoient entrées; & cela parceque la dilatation des pores persiste toûjours; mais dès que le feu cesse d'agir la cause de la dilatation cessant aussi, les parties du corps qui avoient été soûlevées, s'affaissent, & les pores se rétablissent dans leur premier état; alors les parties de feu qui s'étoient introduites dans les cellules de ce corps, s'y trouvent tout d'un coup emprisonnées, & n'en peuvent plus sortir sans une nouvelle dilatation de pores ou une fusion parfaite du corps qui les retient.

On ne doit pas s'étonner de ce que les corps qui par la calcination ont fait une provision abondante de matiere de feu, ne donnent aucun sentiment de chaleur quand on les touche; car comme les parties de feu qu'ils renferment interieurement, ne peuvent parvenir jusqu'à la main appliquée sur la surface de ces corps, elles ne se font pas plus appercevoir par cette épreuve que si elles n'y étoient pas contenuës; de même que le sel n'est sensible au goût, que quand il est assez dégagé de tout autre corps, pour frapper immédiatement l'organe de cette sensation. Par conséquent quand les corps nouvellement retirez du feu font une impression si vive de chaleur, ce n'est pas par les parties de feu qu'ils tiennent emprisonnées; mais par celles qui ont trouvé des issuës assez ouvertes pour s'échaper au dehors. Car on peut admettre dans les corps deux sortes de pores, les uns qui naturellement sont assez grands pour donner en tout tems un passage libre à la matiere du feu, & les autres qui ne lui en donnent que quand ils ont été dilatez par la chaleur; comme je l'ai déja remarqué.

Enfin on me demandera peut-être encore pourquoi la matiere du feu enfermée dans les corps salins & pierreux ne dérange pas les parties qui s'oppoſent à ſa ſortie, puiſque l'eau qui a bien moins d'activité que cette matiére, en vient bien à bout.

Je répons, que ſi la quantité de la matiere de la lumiere contenuë dans la chaux éroit auſſi grande que celle de l'eau qu'on verſe deſſus pour en faire ſortir cette matiere, elle n'auroit peut-être pas beſoin de ſecours étranger pour s'échaper, & elle ſeroit par elle-même plus que ſuffiſante pour cela ; mais toute active qu'elle eſt elle ſe peut trouver en ſi petite quantité par rapport aux parties de l'eau, que ces parties auront plus ou autant d'action qu'elle pour de certains effets ; or il eſt certain qu'on dégage des corps dont il s'agit, bien moins de parties de feu qu'on n'emploie de parties d'eau pour les dégager.

De plus, pour ce qui regarde les ſels alkalis qui ſont ceux qui contiennent des parties de feu, on ſait que l'eau les diſſout avec une promptitude étonnante, & que le feu le plus fort auroit bien de la peine à les mettre auſſi promptement en fuſion ; ſi donc l'eau deſunit ſi bien toutes les parties de ces ſels, elle donnera facilement par-là, comme il a déja été dit, une iſſuë libre à la matiere de la lumiere engagée & retenuë entre ces parties ; & s'il ne faut pas moins qu'un feu de fuſion pour produire la même deſunion ou le même dérangement dans ces ſels, comme la matiere de lumiere qui y eſt contenuë, n'eſt pas à beaucoup près auſſi abondante, & par conſéquent auſſi puiſſante que celle d'un feu de fuſion, il eſt clair qu'elle agi-

ra.

ra en cette occasion avec moins d'efficacité que l'eau.

Enfin il ne faut pas s'imaginer que ce liquide versé sur la chaux & sur les sels alkalis, ouvre tout seul un passage à la matiere de la lumiere ; & en effet comme on peut supposer avec toute la vrai-semblance possible, que cette matiere conserve toûjours son mouvement dans l'interieur de ces corps, il y a lieu de croire qu'elle travaille continuellement, & au dedans de sa prison à forcer les obstacles qui s'opposent à sa sortie, & que si malgré ses efforts elle ne peut parvenir à son élargissement sans un secours exterieur : du moins contribuë-t-elle beaucoup à faciliter & assûrer l'effet de ce secours.

Le Soleil ne paroît être autre chose qu'un amas très-considérable de matiere de feu ou de lumiere, ou si l'on veut une grande flamme qui ne differe point essentiellement de la nôtre, puisque l'une & l'autre produisent parfaitement les mêmes effets ; mais comme cet Astre se trouve très-éloigné de nous, il ne peut agir sur les corps terrestres que par deux voies, savoir, ou par des émanations & des échapées de sa substance, qui partant du lieu de leur demeure naturelle, viennent se rendre jusqu'à nous. Mais cette hypothèse étant sujette à quelques inconveniens, ou plûtôt ne suffisant pas pour l'intelligence de certains phénomenes, on peut encore supposer des traînées abondantes de matiere de lumiere, qui sont toutes placées dans les interstices de la grande masse du fluide interposé entre le Soleil & nous, & ces traînées agissent fortement sur les corps terrestres quand elles sont pressées & poussées vigoureusement

&

& en abondance vers ces corps par la préſence du Soleil. On pourroit les regarder chacune comme des eſpeces de petits Soleils prolongez, mais qui dépendent du grand comme de la ſource de leur mouvement ou de leur action ſur les corps terreſtres.

Ces traînées qui forment les raions lumineux, & qui ſont les agents immédiats de la lumiere, ne different point quant à leur matiere de la ſubſtance même du Soleil, & non-ſeulement il eſt inutile de le ſuppoſer, mais l'experience & l'examen y ſont encore formellement oppoſez. Et en effet le Soleil étant une flamme qui produit les mêmes effets que la nôtre, on peut raiſonner de la maniere dont il agit ſur les corps terreſtres par celle dont nous remarquons que nôtre flamme y agit auſſi. Or il eſt certain que quand on plonge ces corps dans la flamme même, c'eſt la propre matiere de cet agent, qui ſans aucun autre ſecours les penetre, les échauffe, & les modifie differemment ſuivant leur nature particuliere; & quand on préſente ces corps au feu ſans qu'ils touchent à la flamme, les impreſſions qu'ils en reçoivent ne different point eſſentiellement de celles que la flamme même appliquée immédiatement ſur ces corps auroit produite; elles n'en different que du plus au moins, en ſorte qu'un corps ſur lequel une petite flamme agiroit immédiatement, n'en ſeroit pas plus échauffé ni autrement alteré, que ſi on le plaçoit à une diſtance aſſez conſidérable d'une grande flamme.

Tout cela marque ſuffiſamment que la matiere de feu ou de lumiere interpoſée entre la flamme & nous eſt de même nature que la flamme même. Pourquoi donc les raions lumineux qui

qui ſervent à tranſmettre juſqu'à nous l'action du Soleil, & qui n'en paroiſſent être qu'une continuation, ſeroient-ils d'une matiere differente de celle de cet Aſtre; & en effet quand on les réunit par le moien du verre ardent, ils agiſſent en cet état avec autant & plus de vivacité ſur les corps terreſtres, que pourroit faire la flamme la plus violente appliquée immédiatement ſur les mêmes corps; ce qui marque non ſeulement que la matiere de ces raions eſt la même que celle de la flamme, mais encore que la flamme conſiſte dans l'amas d'une grande quantité de matiere de lumiere qui agit d'autant plus vivement qu'elle eſt plus abondante & plus réunie. Suivant ce raiſonnement le Soleil ne paroît differer des raions de lumiere réunis par le verre ardent, qu'en ce que la matiere de lumiere y étant en plus grande quantité, & peut-être même encore plus réunie qu'elle ne l'eſt dans ces raions, il agiroit avec plus de force & de promptitude qu'eux, ſi les corps terreſtres y étoient immédiatement appliquez.

L'action violente des raions réunis par le verre ardent, fait aſſez connoître que le fluide qui dans leur état naturel les ſépare & les étend, ſert à temperer cette action, & à la rendre plus ſupportable; car ſans cet intermede au lieu d'éclairer & d'exciter une chaleur douce, ils conſumeroient tous les corps & détruiroient l'organe de la vûë; & pour me ſervir d'une comparaiſon ſenſible, l'air doit être regardé par rapport aux raions lumineux qui tombent ſur nous comme l'eau par rapport aux parties de feu qui paſſent de ce liquide dans un corps expoſé à la chaleur du bain marie; c'eſt à dire que la violence des raions lumineux eſt temperée

rée par leur paſſage au travers de l'air, comme celle des parties de feu eſt adoucie par leur paſſage au travers de l'eau. On pourroit encore comparer les raions lumineux aux eſprits corroſifs qui déchirent & rongent puiſſamment quand ils ſont purs, & qui produiſent une aigreur très-agreable, quand ils nagent dans une ſuffiſante quantité de liquide.

La matiere de lumiere pouſſée par le Soleil ſur les corps terreſtres, les modifie differemment ſuivant la nature de ces corps. Il y en a de certains que cette matiere met & entretient facilement en fuſion; telles ſont les parties d'eau qui originairement ſont ſolides, & qui ne doivent leur fluidité qu'au mélange & à l'action de la matiere de lumiere. La preuve en eſt que leur fluidité perſiſte tant que le Soleil détermine une quantité ſuffiſante de cette matiere à porter ſon action ſur les corps terreſtres; mais dans les Saiſons où il ne nous en envoie que peu, comme ce peu ne ſuffit pas pour entretenir la fuſion de ces parties, elles retombent dans leur premier état d'immobilité, d'où elles reſſortent enſuite quand on les préſente au feu, ou, ce qui eſt la même choſe, quand le Soleil recommence à pouſſer vers les corps terreſtres, une plus grande quantité de matiere de lumiere.

Ce qui vient d'être dit, fait aſſez connoître 1°. Que la glace n'eſt qu'un rétabliſſement des parties d'eau dans leur état naturel. 2°. Que la ſeule abſence de matiere de lumiere ſuffit pour concevoir ce rétabliſſement; & enfin que la fluidité de l'eau eſt une fuſion véritable qui peut être comparée à celle des métaux expoſez au feu, & qui n'en differe qu'en ce que les mé-

métaux ont continuellement besoin d'une grande quantité de parties de feu pour être mis & entretenus en fusion, & que rarement il vient assez peu de matiere de lumiere aux parties de l'eau, pour qu'elles puissent reprendre leur premier état de solidité, comme font les métaux fondus, & éloignez ensuite de la cause de leur fusion.

Un autre effet de la matiere de lumiere répanduë sur les corps terrestres; c'est de s'engager dans de certains composez de sel, de terre, & d'eau, & de former avec eux des huiles, des graisses, & en un mot, des corps inflammables qui ne sont tels que par la grande quantité de parties de feu qu'ils contiennent. Ce qui me fait adopter cette conjecture, c'est que quand on analyse ces corps, on les réduit entierement en sel, en terre, en eau, & en une substance fine & déliée qui passe au travers des vaisseaux les mieux bouchez, & qui quelque soin qu'apporte l'artiste pour ne rien perdre, se dissipe toûjours en assez grande quantité pour produire une diminution de poids considerable dans le total de la matiere restante.

Il est certain que le sel, la terre & l'eau, soit qu'on les unisse ensemble, soit qu'on les sépare, ne deviennent jamais inflammables, & même qu'ils empêchent ou retardent le plus souvent l'inflammabilité des corps qui ont cette proprieté. On peut même dire, que ces principes ne servent dans la composition des corps inflammables qu'à contenir & arrêter la matiere de la lumiere qui est la véritable matiere de la flamme, & qui ne s'élance en l'air sous cette forme, que quand le corps inflammable aiant été exposé au feu, cet agent exterieur en a rom-

pu

pu les veſicules, & a donné à la matiere enfermée dans ces veſicules toute la liberté de s'envoler.

C'eſt donc la matiere veritable de la flamme qui échape à l'artiſte dans l'analyſe des corps inflammables, & il ne lui reſte après la décompoſition de ces corps, que les materiaux qui ſervoient à former les priſons dans leſquelles cette matiere étoit retenuë. On accordera aiſément que cette matiere étant libre & renduë à elle-même, doit s'échaper au travers des vaiſſeaux les mieux bouchez, dès qu'on fera attention qu'il n'y a point de vaiſſeau expoſé au feu où cette matiere ne pénetre, & n'aille échauffer le liquide qui y eſt contenu; & quant à la cauſe de l'inflammabilité, l'experience nous faiſant connoître que le ſel, la terre, & l'eau dans quelque ſituation qu'on les mette, ne deviennent jamais inflammables; à qui peut-on plus vrai-ſemblablement attribuer l'effet dont il s'agit qu'à la matiere de la lumiere, qui comme il a déja été prouvé, forme la flamme, & lui donne toutes ſes proprietez.

Au reſte on ne doit point être ſurpris de ce que les métaux calcinez, & en général tous les corps qui par la calcination ont fait une proviſion de matiere de lumiere, ne s'enflamment pas au feu comme font les huiles; car pour qu'un corps s'enflamme & ſe faſſe appercevoir en cet état, il faut que la ſubſtance lumineuſe qui s'en échape continuellement, ſoit aſſez abondante, & forme une maſſe aſſez robuſte pour preſſer de tous côtez & avec vigueur la matiere de lumiere qui ſe trouve confuſément répanduë dans les interſtices de l'air; enſorte que les parties de cette matiere ſe pouſſant ſucceſſivement les unes

&

& les autres selon la détermination directe qui leur a été communiquée, transmettent par-là jusqu'à une distance plus ou moins grande les impressions de la flamme. Mais quand il ne s'échape des corps solides que de petites parcelles de substance lumineuse, elles se trouvent tout d'un coup si fort offusquées par l'air qui les environne, & leur masse est naturellement si foible, qu'il ne lui est pas possible de faire des pressions assez étenduës & assez efficaces pour devenir sensibles à la vûë.

Cela étant on peut concevoir que la matiere de la lumiere contenuë dans les corps inflammables exposez au feu en sort à chaque instant en beaucoup plus grande quantité que ne fait celle qui s'est engagée dans les métaux calcinez; soit parce que les corps calcinez contiennent une moindre quantité de cette matiere que les huiles, soit parce qu'aiant un tissu de parties plus serré, ils ne lui permettent pas une sortie aussi libre, & qu'à chaque effort de l'agent exterieur qui les oblige à s'en désaisir, ils n'en laissent exhaler que de petites parcelles, incapables, comme il a déja été dit, de fraper sensiblement la vûë.

Ce raisonnement s'accorde parfaitement avec un fait assez commun; c'est que quand on expose à un trop petit feu des corps très-inflammables, comme le papier, la paille; ils se consument quelquefois entierement sans jetter aucune flamme; & cela parceque l'agent exterieur étant trop foible pour chasser à la fois une grande quantité de la matiere de la lumiere contenuë dans ces corps, toute cette matiere s'échape successivement en petites portions invisibles, & proportionnées à la force qui procure leur délivrance.

Ce

Ce ſeroit ici le lieu de rendre raiſon de pluſieurs phénomenes curieux, auſquels la ſuppoſition de la matiere de lumiere enfermée, convient parfaitement, & qui s'expliquent même ſi naturellement & avec tant de facilité par cette voie, qu'il ſemble que chacun de ces phénomenes ſoient autant de preuves de la verité de la ſuppoſition. Par exemple la matiere de lumiere ne paroît-elle pas convenir particulierement aux phoſphores, tant naturels qu'artificiels, & à ces fermentations violentes & accompagnées d'une flamme conſiderable que les huiles dont on ſe ſert dans ces ſortes d'experiences ſont contraintes de laiſſer exhaler quand elles y ont été forcées par des acides nitreux ou vitrioliques qui les ont pénetrées. Mais ſi je m'engageois dans une explication complette de toutes les experiences de cette nature, & de toutes les circonſtances ſingulieres qui les accompagnent chacune en particulier, & qui les diverſifient, je paſſerois de fort loin les bornes que je me ſuis preſcrites, & je déroberois à d'autres Memoires des ſujets qui meritent bien d'être traitez particulierement.

Je remarquerai ſeulement dans ce Memoire-ci, que les phoſphores en general doivent être regardez comme des eſpeces d'éponges pleines de matiere de lumiere, dans leſquelles cette matiere eſt ſi foiblement retenuë, & tient à ſi peu de choſe, qu'elle n'a pas beſoin d'un grand ſecours exterieur pour devenir en état de s'exhaler ſous une forme lumineuſe, & ſouvent même de brûler, & d'enflammer les corps preſentez à ſon action.

Il ſuit de tout ce qui a été dit, que ſi le Soleil paroît être une eſpece de grand reſervoir

de

de matiere de lumiere, nous en avons ici dans les corps inflammables un très-grand nombre de reſervoirs particuliers qui ſemblent avoir été formez pour ſuppléer en tems & lieu au défaut du Soleil; & en effet comme ſa préſence nous eſt indiſpenſablement neceſſaire pour la lumiere & pour la chaleur, & cet Aſtre ne nous éclairant pas toûjours & s'éloignant même de nous dans de certaines ſaiſons, ou ce qui revient au même, ne déterminant alors qu'une petite quantité de matiere de lumiere à pénetrer les corps terreſtres, nous trouvons heureuſement dans le ſein de la terre même de quoi ſubvenir aux maux dans leſquels l'abſence ou l'éloignement du Soleil nous jetteroient immanquablement; c'eſt à dire aſſez de matiere de lumiere pour pouvoir former des eſpeces de petits Soleils qui nous échaufent & nous éclairent auſſi-bien que le grand, & qui ſont en quelque ſorte ſes ſubſtituts.

DE L'EVANOUISSEMENT DES QUANTITEZ INCONNUES DANS LA GEOMETRIE ANALYTIQUE.

PAR M. ROLLE.

* TOUTES les Recherches que l'on a faites dans la Geometrie Analytique ſe réduiſent à deux Claſſes. Dans l'une on ſe propoſe de transformer les Queſtions de cette Scien-

* 9. Août 1709.

Science en Problêmes d'Algebre ; & dans l'autre on ne s'occupe que du ſoin de réſoudre ces Problêmes.

Comme la Méthode de faire évanouïr les Inconnuës par la voie du dégagement & des Subſtitutions eſt d'un frequent uſage dans ces recherches, & qu'il ſe trouve dans cette Méthode pluſieurs difficultez, auſquelles on n'a pas fait aſſez attention ; je me ſuis propoſé en marquant ces difficultez, de marquer en même temps comment on peut les réſoudre : Ce qui demande pluſieurs Mémoires. En cela, l'ordre le plus naturel me preſcrit de commencer par l'Examen des Problêmes de pure Algebre qui n'ont que deux Egalitez & deux Inconnuës, & dont les termes ne ſont affectez ni de fractions ni de ſignes radicaux. Ce ne ſont auſſi que ces ſortes de Problêmes qui feront le ſujet de ce premier Mémoire.

Ce Projet ainſi reſtraint, ne laiſſe pas de renfermer une infinité d'Exemples qui déſignent quatre Inconveniens dignes de remarque dans la Méthode en queſtion.

Car l'on y trouve, 1°. Des Queſtions impoſſibles qui paroiſſent poſſibles & même faciles à réſoudre, quand on n'en juge que par cette Méthode.

2°. Des Queſtions qui ſe réduiſent à des Egalitez tout à fait imaginaires, ou à des contradictions manifeſtes comme $7 = 4$; qui ne laiſſent pas d'être poſſibles & ſolubles.

3°. Des Queſtions déterminées les unes poſſibles, les autres impoſſibles qui paroiſſent indéterminées & capables d'une infinité de Solutions.

4°. Des Queſtions indéterminées qui ſe réduiſent

duiſent à des Egalitez ou imaginaires, ou contradictoires, ou ſeulement capables d'un certain nombre de Solutions réelles, & qui néanmoins en ont une infinité.

C'eſt-là en quoi conſiſtent les difficultez que je veux expliquer dans ce Mémoire.

Dans le premier Article je n'enviſagerai que des Problêmes où les Diviſions que preſcrit la Méthode ne peuvent ſe faire qu'intentionnellement. Et dans le ſecond Article je me propoſerai des Problêmes où les Diviſions ſe font actuellement. Dans l'un & dans l'autre je marquerai les Moiens qui me paroiſſent les plus generaux & les plus convenables pour remedier aux inconveniens indiquez par les Exemples dont je me ſerai ſervi. Delà il ſera facile de voir comment on pourra éviter de ſemblables inconveniens, lorſque les Diviſions ſont en partie actuelles & en partie ſuppoſées.

ARTICLE I. On juge ordinairement de la poſſibilité ou de l'impoſſibilité d'un Problême dans la Méthode en queſtion, ſelon que la Reduite ſe trouve poſſible ou impoſſible. Voici des Cas où l'on verra qu'il eſt ſouvent néceſſaire pour s'en aſſûrer, non ſeulement de faire la ſubſtitution retrograde des racines à l'ordinaire; mais encore de la pouſſer juſques aux Egalitez propoſées, & qu'il ſe trouve des difficultez conſiderables dans ce retour auſquelles on ne fait pas attention. On y verra auſſi comment on peut réſoudre ces premiéres difficultez; ce qui ſervira à découvrir d'autres inconveniens de cette Méthode, qui ſeront expliquez dans la ſuite.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple, la Réduite du Problême renferme pluſieurs racines réelles, & néanmoins le Problême eſt imaginaire.

Le Problême propoſé eſt celui qu'expriment les deux Egalitez A, B.

$A \ldots yy + xx = nx.$

$B \ldots yy + 4nx = 6nn.$

Dans le deſſein qu'on auroit de réſoudre ce Problême par la Méthode en queſtion, & de faire premierement évanouïr y, le dégagement dans l'Egalité A, ſeroit comme on le voit ici en C.

$C \ldots yy = nx - xx.$

Suivant cette Méthode, il faut ſubſtituer cette valeur de yy dans l'égalité B. Ce qui donne la réſultante D.

$D \ldots xx - 5nx + 6nn = 0.$

Cette réſultante ainſi trouvée ne renfermant pas l'inconnuë y que l'on a fait évanouïr, elle eſt par conſéquent la réduite du Problême A, B. Et comme cette réduite renferme des racines réelles, il faudroit conclure ſelon des préjugez ordinaires, que ce Problême eſt poſſible. Mais en faiſant évanouïr l'inconnuë x par la ſubſtitution retrograde de ſes valeurs priſes en D, on verra aiſément dans cet exemple, que le Problême eſt abſolument impoſſible.

Car cette Réduite D étant réſoluë, on trouve qu'elle n'a point d'autres racines que $x = 2n$ & $x = 3n$. On trouve auſſi en ſubſtituant ces valeurs dans C, que les réſultantes ſont celles qu'on voit ici en E, F.

$E \ldots$

$E \ldots yy = -2nn.$ ou $y = \pm\sqrt[2]{-2nn}.$

$F \ldots yy = -6nn.$ ou $y = \pm\sqrt[2]{-6nn}.$

Ainſi, la ſubſtitution retrograde des valeurs réelles de x, ne donne dans l'égalité du dégagement que des valeurs imaginaires pour y; & comme cette égalité, dans cet exemple, eſt la même qu'une des propoſées, il eſt facile de voir que le Problême propoſé eſt imaginaire, quoique ſa réduite ſoit entierement réelle.

Pour ſurcroît de preuves, on trouvera en ſubſtituant $x = 2n$ & $x = 3n$ dans B que les réſultantes ſont encore imaginaires. Ainſi, le Problême qu'expriment les égalitez A & B eſt un Problême impoſſible, quoique la premiere donne un Cercle; que la ſeconde fourniſſe une parabole, & que leur réduite ſoit poſſible.

REMARQUE. Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'égalité réelle D par la Méthode ordinaire des effections géometriques en prenant l'égalité A pour le premier lieu, cette Méthode donnera B pour le ſecond lieu, & l'on trouvera que la conſtruction ne donne aucune des racines de D. Cet inconvenient dans un exemple auſſi ſimple fait voir la force du préjugé où l'on étoit : Que la réduite des lieux ſuffit pour ſavoir ſi le Problême qu'ils expriment, eſt poſſible ou impoſſible. Car pour s'aſſurer du ſuccès d'une conſtruction, on ſe contente dans cette Méthode que cette réduite ſoit la même que la propoſée, ſans s'occuper de ce qui arrive dans la ſubſtitution retrograde. C'eſt à dire qu'aiant voulu conſtruire D, & trouvant que D eſt la réduite des lieux, il ne faudroit rien de plus ſuivant ce préjugé pour

s'assurer que la construction donnera les racines de cette Egalité, & que le nombre des points où les Courbes se rencontreront sera égal au nombre de ces racines.

On verra ici par d'autres exemples qu'il y a des cas où il n'est pas facile de voir cet inconvenient, & que pour le découvrir il faut ajoûter des regles considerables à la Méthode en question.

SECOND EXEMPLE.

Dans cet Exemple la Méthode oblige de faire deux dégagemens pour trouver la Reduite. On voit qu'ils s'accordent dans leurs effets, & que néanmoins il faut substituer la valeur de chaque inconnuë dans toutes les Egalitez proposées, pour savoir si la racine de cette Réduite convient au Problême.

Ce Problême est celui que representent *G*. *H*.

G... $xyy+x^3=nyy+cly$.

H... $xyy+pll=xxy+gyy$.

Dégageant *yy* dans *A* on trouve *I*.

I... $yy=\frac{lcy-x^3}{x-n}$.

Substituant cette valeur de *yy* dans l'égalité *H*, & dégageant *y* de celle qui en résulte on aura *K*.

K... $y=\frac{x^4-gx^3-pllx+npll}{nxx-x^3+clx-gcl}$.

Et cette derniere valeur de *y* étant substituée dans *I* ou *G*, donnera la réduite *L*.

L...

$$L\ldots\ 2x^9-3nx^8+nxn^7 \\ -2gx^8-clx^7 \\ +ggx^7 \\ +2gnx^7 \quad \&c. \Big\} = \theta.$$

Cette réduite ſe diviſe par $x-n$. Donc $x=n$ en eſt une racine réelle. Il faut voir ſi elle convient au Problême propoſé G, H.

Subſtituant cette valeur de x dans le dernier dégagement K, on aura $y=\frac{n^4-gn^3}{cnl-gcl}$, qui s'abrége en diviſant par $n-g$, & delà $y=\frac{n^3}{cl}$.

Ainſi $x=n$ & $y=\frac{n^3}{cl}$ devroient réſoudre le Problême. On trouve en ſubſtituant ces valeurs dans l'Egalité du premier dégagement I, qu'elles en ſont une ſolution: Et comme cette Egalité eſt le même que la Propoſée G, on peut aſſûrer qu'elles en ſont auſſi une ſolution; mais en ſubſtituant ces valeurs de x & de y. Dans l'autre Propoſée H, il en réſulte l'Egalité M.

$$M\ldots\ pccl^4+n^7=cln^5+gn^6,$$

qui ſeroit une Egalité réſoluë ſi p valoit $\frac{cln^5+gn^6-n^7}{ccl^4}$, ou ſi la valeur de g étoit $\frac{pccl^4-cln^5+n^7}{n^6}$. Ou bien, ſi $g=n$, & en même tems $p=\frac{n^5}{cl^3}$. Car dans ces trois cas, le premier membre de M ſeroit égal au ſecond, & cette réſultante ſe réduiroit à $\theta=\theta$. Mais il eſt évident qu'il y a beaucoup plus de cas où M ſe trouveroit contradictoire.

Ainſi l'on peut voir dans cet Exemple:

1°. Qu'il ne ſuffit pas toûjours de faire la ſubſtitution retrograde dans l'Egalité du der-

nier dégagement lorſqu'il fournit une valeur réelle pour l'Inconnuë dégagée, ni même lorſqu'elle ſe confirme par les autres dégagemens.

2°. Qu'il y a des cas où il faut faire la ſubſtitution des valeurs que fournit la Méthode dans toutes les Egalitez du Problême propoſé, ou avoir des moiens équivalens, pour ſavoir ſi ces valeurs ſatisfont aux conditions de ce Problême.

REMARQUE I. Le Problême G, H étant conçû en termes generaux, ſi l'on eût fait le premier dégagement dans H, la premiere ſubſtitution ſe ſeroit faite dans G, & la ſeconde dans H, alors la réduite n'auroit point été diviſible par $x-n$, enſorte que la racine $x=n$ ne ſe ſeroit point trouvée dans cette réduite ſur l'hypothêſe que les grandeurs données demeurent en termes generaux. Mais ſi le rapport de ces grandeurs effaçoit la contradiction qui paroît dans M, la réduite ſe trouveroit diviſible par $x-n$, quand même le premier dégagement & les premieres ſubſtitutions auroient été faites comme je viens de le dire. Alors cette réduite ſeroit encore diviſible par $x-g$, quoique ce binome ne diviſe pas la réduite L.

Delà il ſembleroit que pour réformer la Méthode en queſtion, il faudroit neceſſairement dégager dans une des Propoſées & pourſuivre comme on l'a fait ici. Qu'enſuite il faudroit dégager dans l'autre propoſée & faire un ſemblable manége. Mais cette Méthode ſera reglée de maniére, qu'il ſuffira de faire le premier dégagement dans une des propoſées.

TROI-

TROISE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple une Indétermination apparente ſe complique avec une Impoſſibilité ambiguë. La ſubſtitution retrograde dans l'Egalité du dégagement, donne une ſolution du Problême qui paroît réelle dans l'Infini actuel, & qui ſe confirme par une effection géometrique. Cependant la ſubſtitution étant pouſſée juſques aux Egalitez propoſées, ne donne dans l'une & dans l'autre que des contradictions abſoluës. De maniére que le Problême ſeroit ſoluble dans l'Infini, quoiqu'impoſſible dans le Fini, & qu'en ôtant les contradictions, il ſe trouveroit capable d'une infinité de Solutions dont toutes les valeurs ſeroient réelles & finies.

Les deux Egalitez du Problême ſont marquées ici N, O.

$N \ldots xy + ac = cy + ax + dd.$

$O \ldots x^3 + axy = cxx + acy + add.$

dégageant y dans la premiere, la valeur de cette inconnuë ſera comme on la voit en P.

$$P \ldots y = \frac{ax - ac + dd}{x - c}.$$

Et ſi l'on abrége la fraction en diviſant ſes deux termes par $x - c$, la Réduite ſera comme on la voit ici en R.

$R \ldots x^3 - cxx + aax - aac = 0.$

Ces deux réduites n'ont point d'autre racine réelle que $x = c$. Mais cette racine ſe trouve deux fois dans la premiere réduite. Ce qui ſervira à expliquer une difficulté.

Sur cela, on peut faire les obſervations ſuivantes.

1°. En ſubſtituant c à la place de x dans l'Egalité du dégagement P, on aura $y = \frac{dd}{0}$ (qui eſt l'expreſſion ordinaire des grandeurs actuelles infinies). Ainſi, $x = c$ & $y = \frac{dd}{0}$ ſont deux valeurs qui doivent faire une ſolution du Problême ſelon la Méthode. Mais comme il y a une infinité d'Exemples où l'on ſeroit trompé par de ſemblables apparences, il faut ici des connoiſſances qu'elle ne donne pas. Voici une voie qui n'eſt peut-être pas tout à fait indifférente pour cette recherche.

Déja nous avons dans P la valeur de y que fournit la premiere propoſée N, & ſubſtituant $x = c$ dans le numerateur de P ſans ſubſtituer dans ſon dénominateur, on aura cette valeur de y ſous la forme marquée S.

$$S \ldots y = \frac{dd}{x - c}.$$

Dégageant y de la ſeconde propoſée O, on trouve $y = \frac{add + cxx - x}{ax - ac}$. Et ne ſubſtituant $x = c$ que dans le numerateur, on aura $y = \frac{add}{ax - ac}$. Où l'on voit que la fraction s'abrége en diviſant ſes deux termes par a, & que ce diviſeur étant connu, comme il eſt, la diviſion ne peut rien changer dans la valeur des inconnuës. Ainſi cette derniere égalité ſe réduit à celle-ci: $y = \frac{dd}{x - c}$ qui eſt la même que S.

Or cette valeur de y renferme encore x, & l'on a $x = c$. Donc en ſubſtituant dans S, on au-

aura $y=\frac{dd}{\theta}$. Donc $x=c$ & $y=\frac{dd}{\theta}$ désigne une Solution du Problême N, O. Il est vrai que la valeur de y est une grandeur infinie dans N & infinie dans O. Mais il paroît que ces deux infinis sont parfaitement égaux. Car l'un & l'autre est exprimé par la valeur de y qui est en S. Or il est évident que cette valeur sera toûjours égale à elle-même en prenant pour x une valeur arbitraire. Donc elle sera égale à elle-même lorsque $x=c$.

Pour surcroît de preuves on verroit que cette Solution du Problême N, O, se trouveroit dans l'effection géometrique, si l'on construisoit pleinement les Courbes qu'expriment ces deux Egalitez sur un même axe & une même origine; ensorte que la grandeur indiquée par $y=\frac{dd}{\theta}$ seroit exprimée par la distance qui se trouve entre l'axe des x & le point où ces Courbes rencontrent un asymptote qui leur est commun, & l'on verroit aussi que ce point de rencontre doit être le point d'attouchement designé par les racines égales de la réduite Q. Il est vrai que la valeur finie de x seroit inaccessible, mais on peut prouver qu'elle est dans la coustruction sur l'hypothêse que rien ne manque à la Méthode des Effections géometriques. Il en sera encore parlé dans la suite.

2°. Cependant en substituant $x=c$; non dans P; mais dans les Proposées N, O. On trouvera les deux contradictions $dd=\theta$. $ddd=\theta$. Ce qui combat la définition des Egalitez résoluës, & il est certain aussi que le Problême est impossible dans le fini. Mais ces contradictions

deviennent infiniment petites lorſque y eſt infiniment grande, comme on le dira ici.

3°. On voit encore dans cette Subſtitution que l'Inconnuë y ne reçoit aucune détermination & que les deux contradictions diſparoiſſent lorſque $d = \theta$. De maniére que dans ce cas la Solution du Problême N, O, que j'ai indiquée ici ne ſe trouveroit pas, & que dans ce même cas ce Problême eſt capable d'une infinité de Solutions finies. C'eſt à dire que $x = c$ & $y = c$ en ſeroient alors une Solution. Que $x = c$ & $y = 2c$ en ſeroient auſſi une Solution. Ainſi de ſuite à l'Infini.

REMARQUE I. Si l'on compare les deux égalitez N, O, pour faire évanouïr x, on aura occaſion d'y faire des remarques fort curieuſes: mais il ne ſeroit peut-être pas facile d'en tirer une ſolution dans l'Infini, quoique la contradiction qui déſigne cette ſolution ſoit un diviſeur de la réduite, parceque ce diviſeur n'a que des quantitez connuës, & que celui qui renferme l'inconnuë ne fournit que des racines imaginaires. Un exemple moins compoſé fera mieux voir cette difficulté. Soit cet exemple T, V.

$T \ldots yx - ay = ad.$

$V \ldots yx = dx + ay.$

Si l'on fait évanouïr y, l'on aura la Solution $x = a$, $y = \frac{ad}{\theta}$. Mais en faiſant évanouïr x la réduite ſera $dda = \theta$, qui eſt une marque ordinaire de l'impoſſible, & cette réduite ne renfermant aucune inconnuë, il ne peut point y avoir de ſubſtitution retrograde. Mais la contradiction de cette réduite donne lieu de chercher la ſolution $x = a$, $y = \frac{ad}{\theta}$, & l'on n'auroit

pas

pas cet avantage dans l'exemple précedent ; parce qu'en faiſant évanouïr x, la contradiction ne paroît pas dans la Réduite comme dans celle de T, V.

REMARQUE II. Si l'on diviſe par y les deux Egalitez du Problême T, V, il ſera exprimé comme en A, B.

$$A \ldots x = \frac{ad}{y} + a. \qquad B \ldots x = \frac{dx}{y} + a.$$

Et ſubſtituant a au lieu de x, on aura $\frac{ad}{y}$. Ainſi ce Problême ſeroit réſolu ſi $\frac{ad}{y}$ étoit entierement détruite. Prenant $y = 100000z$, on aura $\frac{d}{100000}$ pour la valeur de la contradiction $\frac{ad}{y}$, & ſi à la place de 100000 on ſuppoſe un nombre d'une grandeur infinie ; il eſt clair que d ſera infiniment diviſé. D'où il ſuit que la contradiction ſeroit alors infiniment petite ſi le Problême étoit ſous la forme A, B, & comme la géneration des Courbes qu'expriment ces deux Egalitez, répond à cette derniere forme, on peut dire qu'en Géometrie le Problême ſe réſout dans l'infini : Il en eſt de même du Problême N, O, & de ſes ſemblables. En cela, il ſuffit à l'égard de l'Infini, de ſavoir que l'idée que nous en avons renferme la négation du fini, parce que je ne parle ici des Solutions dans l'Infini, que pour faire voir dans la ſuite, comment on peut les diſtinguer des Solutions dont toutes les valeurs ſont finies. Ce qui eſt abſolument neceſſaire pour démontrer l'étenduë, & l'infaillibilité de la Méthode en queſtion, quand on l'aura reformée.

REMARQUE III. Si l'on a une Egalité comme *C*.

$$C \ldots yy = \frac{a^5}{x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3}.$$

En prenant $x = a$, on aura $yy = \frac{aa}{\theta}$ qui eſt une des formules de l'Infini aſymptotique, & il eſt vrai auſſi que cette Courbe a des aſymptotes réels qui ſont des valeurs de *y*. Mais cette formule n'en déſigne aucun. Elle n'exprime aucune grandeur lorſque θ eſt pris pour un rien abſolu; & ſi l'on prend θ pour un point réel, la ligne infiniment longue qu'elle exprimera, n'eſt pas un aſymptote. C'eſt alors une ligne hors de la Courbe que fournit *C*; de maniere que cette Droite & cette Courbe ne peuvent ſe rencontrer ni dans le Fini ni dans l'Infini.

Si l'on a les deux Egalitez *D*. *E*.

$$D. \frac{aax - 3a^3}{x - a} = yy. \quad E. yy = \frac{a^3x - 3a^4}{xx - 2ax + aa}.$$

Alors $x = a$ donnera $y = \sqrt{\frac{-2aa}{\theta}}$ dans *D* & dans *E*. L'aſymptote que déſigne cette formule eſt réel dans *D*; mais celui qu'elle déſigne pour *E*, eſt un aſymptote imaginaire dans le ſens de l'exemple *C*, & il auroit même une autre condition pour l'exclure des aſymptotes réels.

Je ne parle point des Formules de l'Infini qui viennent des valeurs imaginaires que l'on ſubſtituë, parce que cet inconvenient, quand il peut tromper, eſt ordinairement combiné avec d'autres inconveniens dont je n'ai encore rien dit. C'eſt par une ſemblable raiſon, que je ne marque point ici les cas où il ne paroît pas poſ-

ſible

sible d'exprimer par ces formules les asymptotes qui peuvent servir à résoudre des Problêmes dans l'infini. Mais on pourra voir quelque chose de ces difficultez dans la Remarque qui suit.

REMARQUE IV. Lorsque dans un Problême une des Inconnuës ne se trouve que dans une des Egalitez, & que parmi ses valeurs il y en a d'infinies, on n'a pas besoin de voir si ces Infinis sont égaux à d'autres Infinis pour résoudre ce Problême; & s'il se trouve aussi que cette inconnuë n'ait point de termes moiens dans cette Egalité, on est certain que ces Infinis se réduisent, du moins *à parte rei*, aux Formules telles que $\frac{nn}{6}$. Mais avec tous ces avantages il ne laisse pas d'y avoir fort souvent des difficultez notables, lorsque les Quantitez qu'il faut substituer se trouvent incommensurables. On voit un indice de ces difficultez dans le Problême *F*, *G*.

$$F \ldots yy = \frac{a^4xx - a^6}{x^3 - 3aax + a^3}.$$

$$G \ldots x^6 + 9a^4xx + a^6 = 6aax^4.$$

On peut dire en un sens que ce Problême est capable de douze solutions. Il en a quatre réelles dans le Fini; il en a six réelles dans l'Infini, & les deux autres sont imaginaires. Si en cherchant à résoudre ce Problême, on a en vûë la Méthode en question, on reconnoîtra qu'il faut y ajoûter de nouvelles regles, & qu'il est bon ou même necessaire de marquer les difficultez de cette Méthode separément, pour mieux faire voir dans la suite, comment elles s'impliquent dans des Exemples plus composez.

QUATRIEME EXEMPLE.

On peut voir à l'occaſion de cet Exemple, les apparences alternatives du poſſible & de l'impoſſible, lorſque les limites des Egalitez propoſées & les racines de leur réduite ſont des quantitez incommenſurables.

Les Egalitez du Problême, ſont celles qu'on voit ici en *A* & *B*.

A. $yyx^4 + 3a^3yyx + a^5 = aax^4 + a^3x^3$.

B. $x^6 + 7a^3yyx + a^6 = 3yyx^4 + a^3x^3 + 7a^5x + a^4yy$.

Dégageant *yy* dans *A* on aura *C*.

C... $yy = \frac{aax^4 + a^3x^3 - a^5}{x^4 + 3a^3x}$.

Et ſubſtituant dans *B*, il en réſultera *D*.

D... $x^{10} - 3aax^8 - a^3x^7 + 7a^5x^4 - a^7x^3 - 21a^8xx - 4a^9x + a^{10} = 0$.

Suivant la Méthode il faut prendre chaque racine réelle de la réduite *D*, & la ſubſtituer à la place de *x* dans l'égalité du dégagement *C* pour avoir les valeurs de *y*. Mais toutes les racines réelles de *D* ſont incommenſurables, & ne peuvent être tirées de cette Egalité par la voie des ſignes radicaux ni par la voie des Effections géometriques, d'une maniere qui convienne à la réſolution du Problême. Ainſi, il ne paroît point d'autre voie pour cette recherche que celle des approximations. En quoi il ſeroit facile de ſe méprendre ſi l'on ne ſuivoit en cela que les régles ordinaires. Il eſt vrai que par la Méthode des Caſcades algébriques, on peut avoir par approximation toutes les racines réelles de la reduite *D*; en ſorte que l'erreur ſoit

ſoit plus petite qu'aucune quantité donnée, & diſtinguer, par cette Méthode, toutes ces racines, des imaginaires que cette égalité renferme: mais ce n'eſt pas aſſez pour faire un Suplément à la Méthode qui eſt ici en queſtion. Il ne s'agit pas ſeulement des valeurs de x, il faut encore diſtinguer parmi celles de y, les réelles des imaginaires dans la ſubſtitution retrograde des racines de D. On trouvera par exemple, qu'une de ces racines eſt entre a & θ; enſorte que a eſt proche de cette racine; & ſi l'on s'aviſoit de ſubſtituer a dans C à la place de x pour avoir les valeurs de y, on trouveroit $y = \frac{1}{2}a$ & $y = -\frac{1}{2}a$ qui ſont, comme l'on voit, des valeurs réelles. Cependant la veritable racine de D qui eſt entre a & θ, ne donne dans C que des valeurs imaginaires pour y. En d'autres occaſions, au contraire, la ſubſtitution de la racine approchée donneroit des valeurs imaginaires pour y lorſqu'elle doit donner des valeurs réelles. Mais en rapellant ici la Méthode des queſtions indéterminées que je publiai en 1699; cette Methode donnera les limites de x dans C; & comparant ces limites approchées aux racines approchées de D, on découvrira tout ce qu'il y a de réel & d'imaginaire dans le Problême propoſé.

Si l'on fait l'approximation de ces racines & de ces limites par les nombres les plus ſimples qui ſe préſentent, on aura ici pour les limites approchantes de D, les nombres qui ſont en E, F, G, H. Et pour les limites de x dans C, on trouvera les nombres K, L, M, N.

$$\left.\begin{array}{l} E.\ 2.\ 1\frac{1}{2}. \\ F.\ \frac{1}{2}.\ \ 0. \\ G.\ -\frac{1}{3}..-\frac{1}{2}. \\ H.\ -1\frac{1}{2}.-1\frac{2}{3}. \end{array}\right\} D. \qquad \left.\begin{array}{l} K.\ 1.\ \frac{1}{2}. \\ L.\ \ 0. \\ M.\ \frac{-82}{60}.\ \frac{-83}{60}. \\ N.\ \frac{-83}{60}.\ \frac{-84}{60}. \end{array}\right\} C.$$

C'eſt à dire que dans D, il y a une racine entre les deux nombres qui ſont en E, une autre racine entre $\frac{1}{2}$ & 0 qui ſont en F. Encore une entre $-\frac{1}{3}$ & $-\frac{1}{2}$. Et une auſſi entre $-1\frac{1}{2}$ & $-1\frac{2}{3}$.

On verra que dans C les limites de x ſont K, L, M, N, c'eſt à dire, qu'une des limites eſt entre 1 & $\frac{1}{2}$. Que la ſeconde limite eſt 0; la 3e entre $\frac{-82}{60}$ & $\frac{-83}{60}$, & que la 4e eſt entre $\frac{-83}{60}$ & $\frac{-84}{60}$.

Par la Méthode des indéterminées qui donne ces limites de C, on voit que toutes les valeurs réelles de x qui ſont au deſſus de K donnent dans C deux valeurs réelles de y: Que toutes les valeurs de x entre K & L ne donnent dans C que des valeurs imaginaires pour y: Que les valeurs de x priſes dans l'intervale LM donnent deux valeurs réelles de y: Que l'intervale MN ne fournit que des imaginaires pour y; & que l'intervale indéfini au deſſous de N, donne deux valeurs réelles de y. C'eſt-à-dire, qu'en prenant pour x des nombres à volonté au deſſous de N comme $-2.\ -3.\ -4\frac{1}{3}.\ -100$ &c. chacun de ces nombres donnera deux valeurs réelles de y dans C.

Alors,

Alors, il eſt facile de voir en comparant les termes des racines de D aux termes des limites de C, que des quatre racines réelles de la réduite, celles qui ſont marquées E, G, H, étant ſubſtituées dans C, chacune donnera des valeurs réelles de y. Mais que la racine F ſubſtituée dans C ne donnera que des imaginaires pour la valeur de cette inconnuë. D'où il ſuit que le Problême A, B, de ce 4e Exemple eſt capable de ſix ſolutions réelles, & qu'il ne peut pas en avoir d'autres dans le Fini.

Il y a un très-grand nombre d'exemples où il arrive comme dans celui-ci, que les intervales des limites de l'Egalité où ſe doit faire la ſubſtitution retrograde, donnent alternativement des valeurs réelles & des valeurs imaginaires; enſorte qu'il faut pourſuivre l'approximation de ces limites & des racines de la réduite juſqu'à ce que chacune de ces racines ſoit compriſe dans l'intervalle qui lui eſt propre, pour éviter bien des mépriſes.

Remarque. Si l'on ſe propoſe l'Egalité 0, & que pour la conſtruire par la Méthode ordinaire des effections géometriques, on prenne l'Egalité A de ce 4e Exemple pour le premier lieu,

$$0 \ldots x^7 + 7a^6x - a^7 = 0.$$

On trouvera que les Courbes ſe rencontrent en ſix points, & que des ſix racines que donne la conſtruction, il n'y en a aucune qui appartienne à l'Egalité 0, quoique cette Egalité ait une racine réelle.

On pourra s'aſſûrer de cet inconvenient par le moien du détail précedent; & l'on aura occaſion d'y voir que la difficulté de reconnoître de pareils inconveniens, eſt ſouvent une difficulté fort conſiderable.

Ar-

ARTICLE II. Dans la Méthode en queſtion, le dégagement des Inconnuës ſe fait preſque toûjours par une diviſion ou actuelle ou intentionnelle.

Il y a quantité d'Exemples où la diviſion ſe peut faire actuellement, & dans ce cas on peut faire auſſi, ou que la valeur dégagée n'ait point de fraction, ou bien que la fraction qui en réſulte ſoit conçuë en termes plus ſimples qu'elle ne l'auroit été ſans cette diviſion. Comme l'on a très-ſouvent l'occaſion de ces diviſions actuelles, lorſque l'inconnuë qu'on fait évanouïr paſſe le 3e degré dans chacune des deux égalitez propoſées, les inconveniens de la Méthode ſont auſſi en cela fort conſiderables. Car dans l'uſage de cette Méthode on a de coûtume de rejetter les diviſeurs exacts qui ſervent aux dégagemens, ſans rien dire de ce qui obligeroit de retenir ces diviſeurs, & delà il arrive ſouvent, que des queſtions poſſibles, qui quelquefois ont une infinité de ſolutions, ſe changent en queſtions impoſſibles, ou en queſtions qui n'ont pas toutes les ſolutions des Propoſées.

En d'autres Exemples, la diviſion du dégagement ne ſauroit être qu'intentionnelle, comme on a pû le voir dans l'article précedent; mais ſi la diviſion ſe peut faire actuellement, & que neanmoins on ne la faſſe qu'intentionnellement; alors les Problêmes déterminez & les Problêmes impoſſibles ſe changent très-ſouvent en Problêmes indéterminez & capables d'une infinité de ſolutions réelles & finies, quoique l'on conduiſe le jeu analytique de la même maniere qu'on le conduit lorſque les diviſions du dégagement ne peuvent être qu'intentionnelles.

De

De ces deux inconveniens fondamentaux il en réſulte un troiſiéme inconvenient, qui eſt digne de l'attention des Geometres. Car dans la plûpart des Problêmes où il y a occaſion de faire une diviſion exacte pour le dégagement d'une inconnuë, on tombe dans l'un ou dans l'autre des deux principaux écueils que je viens de marquer, ſoit que l'on faſſe cette diviſion actuellement, ou qu'on ne la faſſe qu'intentionnellement. Il y a des Problêmes néanmoins, où les deux manieres de diviſer ne jettent que dans un même écueil; mais cet écueil eſt different des autres.

Voici des Exemples où je tâcherai d'expliquer ces difficultez & de marquer les moiens dont je me ſers pour les réſoudre.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple le Problême eſt indéterminé & capable d'une infinité de Solutions. Cependant la Methode n'en donne que deux.

Le Problême propoſé eſt celui qu'expriment les Egalitez *A*, *D*. Les inconnuës ſont *x*. *y*.

$A \ldots xxy - aay = 2axx - 2a^3.$

$B \ldots yxx + 2aay + 3aax = 3axy + axx + 2a^3.$

Dans le deſſein qu'on auroit de réſoudre ce Problême, le meilleur parti ſelon la Méthode eſt de faire évanouïr *y* & de le dégager de l'égalité *A* en diviſant chaque membre de cette égalité par $xx - aa$. Si l'on ſe contentoit d'une diviſion intentionnelle, on auroit $y = \frac{2axx-2a^3}{xx-aa}$, mais en diviſant actuellement, on trouve que le dégagement donne l'Egalité *C*.

C ...

$C \ldots y = 2a.$

Suivant la Méthode il faut ſubſtituer cette valeur de y dans B. Ce qui donne la réduite D.

$D \ldots xx - 3ax + 2aa = 0.$

Dont les racines ſont $x = a$ & $x = 2a$, qu'il faudroit ſubſtituer à la place de x dans l'Egalité du dégagement C. Mais comme cette inconnuë ne s'y trouve pas, & que ſans cela on y trouve une valeur connuë de y, la ſubſtitution retrograde que preſcrit la Méthode n'a point de lieu dans cet Exemple. Ainſi, il faudroit conclurre ſelon cette Méthode que ce Problême n'a que deux Solutions ; l'une $y = 2a$, $x = a$, l'autre $y = 2a$, $x = 2a$. Cependant ce Problême en a une infinité. Car en faiſant $x = a$, par cela ſeul les deux propoſées A, B, ſont réſolues. Ainſi, l'on peut prendre pour y une valeur telle qu'on voudra.

REMARQUE I. Il eſt évident qu'en rejettant le diviſeur $xx - aa$, c'eſt de l'Egalité A en faire l'Egalité C & transformer le Problême indéterminé A, B, en un Problême déterminé $B.C$.

REMARQUE II. Si en dégageant y de A, l'on s'étoit ſervi de la diviſion intentionnelle, on auroit trouvé l'indétermination de ce Problême en ſubſtituant les racines de la réduite dans l'égalité du dégagement, & il eſt vrai auſſi que cette diviſion retient le diviſeur qui a été rejetté. Ce qui juſtifieroit l'uſage de cette eſpece de diviſion, & remedieroit dans cet Exemple à un inconvenient de la Méthode. Mais il faut voir d'autres Exemples avant que de tirer ces conſéquences.

REMARQUE III. Si l'on dégage y dans B par une diviſion actuelle, on aura ces deux Solutions $y = a$, $x = a$, $y = a$, $x = -a$.

SE-

SECOND EXEMPLE.

Selon la Methode le Problême paroit impoſſible. Cependant il eſt capable de quatre differentes ſolutions.

Les Propoſées ſont E, F.

$E \ldots xxy - bby = 2bxx - 2b^3$.

$F \ldots bxx + 9b^3 + xyy = 4bbx + 2byy$.

Dégageant y dans E par une diviſion actuelle on aura G.

$G \ldots y = 2b$.

Subſtituant dans F on trouvera la Réduite H.

$H \ldots xx + bb = 0$.

Qui eſt, comme l'on voit, tout à fait imaginaire. D'où il faudroit conclurre ſelon la Méthode, que le Problême E, F, eſt impoſſible. Dans ce Problême neanmoins ſe trouvent les quatre ſolutions qui ſont en I, & K.

$$I. \begin{cases} x = b. y = \sqrt[2]{6bb} \\ x = b. y = -\sqrt[2]{6bb} \end{cases} \qquad K. \begin{cases} x = -b. y = \sqrt{\frac{14}{3}}bb \\ x = -b. y = -\sqrt{\frac{14}{3}}bb \end{cases}$$

Remarque. Cette queſtion eſt déterminée; cependant la diviſion intentionnelle du dégagement en auroit fait une queſtion indéterminée & capable d'une infinité de ſolutions. Ce qu'il faudra comparer à la ſeconde remarque du premier Exemple pour voir que le Remede qu'on y propoſe ne ſeroit pas géneral.

TROI-

TROISIE'ME EXEMPLE.

La Réduite eſt contradictoire, & néanmoins le Problême eſt poſſible.

Les deux Egalitez du Problême ſont L, M.

$L \ldots xxy - 9bby = 2bxx - 11b^3$.

$M \ldots xxyy + 15b^4 = 4bbxx + 4bbyy$.

Diviſant actuellement L par $xx - 9bb$, on aura le dégagement N.

$N \ldots y = 2b$.

Subſtituant dans M, on ne trouvera pour réduite que la contradiction O.

$O \ldots b^4 = 0$.

Ainſi, ſelon la Méthode, il faudroit conclure que la queſtion eſt impoſſible. Cependant elle a ces quatre ſolutions.

$1 \ldots x = 3b, y = \sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}$.

$2 \ldots x = 3b, y = -\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}$.

$3 \ldots x = -3b, y = \sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}$.

$4 \ldots x = -3b, y = -\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}$.

REMARQUE I. La contradiction O déſigne une ſolution dans l'Infini, qui convient à l'égalité M, mais qui ne convient pas à l'égalité L, ni par conſéquent au Problême propoſé.

REMARQUE II. Si l'on s'aviſe de réſoudre ces trois Problêmes par des effections géometriques, on aura occaſion d'obſerver une difficulté dans la conſtruction des lieux qui eſt in-

indiquée dans les Mémoires du 11. Juillet 1708, & qui eſt expliquée dans le Memoire du 9. Août 1709; mais dont l'explication n'a pû être compriſe dans l'Impreſſion de ces Memoires, & qui ne peut encore être inſerée dans celui-ci.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple le Problême eſt poſſible & déterminé. Cependant la Méthode le fait paroître impoſſible quand on dégage l'Inconnuë par une diviſion actuelle, & indéterminé lorſque le dégagement ſe fait par une diviſion intentionnelle. On voit encore dans cet Exemple, qu'il n'eſt pas facile de reconnoître l'indétermination lorſque les racines de la Réduite ſont incommenſurables. En ſorte que l'on ne ſauroit éviter ces inconveniens par la Méthode en queſtion, quelque choix que l'on faſſe des Egalitez & des Inconnuës dans le début & dans la ſuite des Operations.

Les deux Egalitez de ce Problême ſont P & Q.

$P \ldots yy + xy + xx + bn = ay + ax.$

$Q \ldots xxyy + cnny + cnnx = bnxy.$

Dégageant yy dans la premiere on aura R.

$R \ldots yy = ay - xy - xx + ax - bn.$

Subſtituant dans la ſeconde, cette valeur de yy, on aura la réſultante S,

$S \ldots x^3y - axxy + bnyx - cnny = x^3 + ax^2 [- bnxx + cnnx.$

Diviſant actuellement chaque membre de cette S, par $x^3 - axx + bnx - cnn$, on aura le ſecond & dernier dégagement T.

$T \ldots y = -x.$

Suivant la Méthode il faut ſubſtituer cette valeur

leur de y dans R, & la ſubſtitution donne la réduite V.

$$V \ldots xx = -bn \text{ . ou . } x = \pm\sqrt{-bn}.$$

qui eſt, comme on voit, abſolument imaginaire. Ainſi, il faudroit conclure ſelon la Méthode, que la queſtion de ce 4e Exemple eſt une queſtion impoſſible, lorſque le dégagement de y ſe fait dans la réſultante S par une diviſion actuelle.

On évite cet écueil & l'on tombe dans un autre ; quand on fait ce dégagement par une diviſion ſuppoſée. Alors, on le trouve comme on le voit en Z.

$$Z \ldots y = \frac{-x^4 + ax^3 - bnxx + cnnx}{x^3 - axx + bnx - cnn}.$$

Subſtituant cette valeur de y dans R ou P comme le preſcrit la Méthode, on aura la réduite Δ.

$$\Delta \ldots \overline{x^3 - axx + bnx - cnn}^{2} \times \overline{xx + bn} = 0.$$

Dans laquelle il ſe trouvera toûjours du moins une racine réelle, & il peut y en avoir trois differentes entr'elles, ſelon les grandeurs & les rapports des quantitez connuës a, b, c.

Suivant la Méthode, il faudroit ſubſtituer ces racines dans Z pour avoir les valeurs de y. Mais quand même il n'y auroit point d'écueil à craindre, il faut demeurer court (ſi l'on n'a point d'autre voie) tandis que les quantitez connuës demeurent en termes generaux ; & l'on y trouveroit encore une difficulté ſi ces quantitez étant conçûës en termes particuliers les racines étoient incommenſurables du 3e degré, comme on le verra ſi l'on prend $a = 7n$. $b = 12n$. $c = 8n$. Car l'approximation des racines de Δ ne dé-

découvriroit point l'écueil qui eſt en Z; il faut pour le connoître par cette voie, que ces racines aient toute leur valeur, & n'aient rien de ſuperflu.

Mais ſi l'on a, par exemple, $a=6n$, $b=11n$, & $c=6n$; alors les racines de Δ ſe trouveront commenſurables: ces racines ſeront $x=n$, $x=2n$, $x=3n$, & chacune étant ſubſtituée dans Z, on verra dans toutes ces ſubſtitutions que l'inconnuë y ne reçoit aucune détermination, & qu'en faiſant le dégagement de y dans S par une diviſion ſuppoſée, la Méthode ne donne pas la ſolution du Problême déterminé P, Q; & le transforme en un Problême Z, Δ, qui eſt veritablement indéterminé.

Ainſi, ſoit que l'on ait dégagé y de S, ou effectivement ou par ſuppoſition, la Méthode conduit dans l'un ou dans l'autre des deux écueils que j'ai marquez ici. Dans le premier, elle exclut toutes les ſolutions du Problême: dans le ſecond elle introduit une infinité de ſolutions étrangeres ſans y faire diſtinguer celles qu'il faut trouver.

On tomberoit dans de pareils inconveniens, ſi l'on faiſoit évanouïr x. Les inconveniens ſeroient encore de même, ſi les premiers dégagemens pour l'une & pour l'autre inconnuë ſe faiſoient dans la ſeconde égalité; & à cela ſe joindroient d'autres inconveniens ſi l'on commençoit par les derniers termes des propoſées. Mais en ſubſtituant, quand on le peut, les racines de Δ dans l'une des propoſées, on trouvera les ſolutions du Problême.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Ce Problême eſt abſolument impoſſible. Cependant il paroît poſſible & même capable d'une infinité de ſolutions, par la Méthode en queſtion.

Les deux Egalitez ſont A & B.

$A \ldots yy - xy + xx = 0.$

$B \ldots yy - ry + rr = 0.$

Dégageant yy dans l'une des deux à volonté, & ſubſtituant dans l'autre on aura C.

$C \ldots xy - ry = xx - rr.$

Sur quoi on peut faire ces remarques.

1°. Si l'on dégage y dans C par une diviſion intentionnelle, on aura D.

$$D \ldots y = \frac{xx - rr}{x - r}.$$

Et ſubſtituant cette valeur de y dans A ou B à volonté on trouvera la réduite E.

$E \ldots x^4 - rx^3 - r^3x + r^4 = 0.$

Dont les deux racines réelles ſont égales, & chacune eſt $x = r$.

2°. Si l'on ſubſtituë cette racine en retrogradant D, on verra que l'inconnuë y ne reçoit aucune détermination & que la réſultante n'a rien de contradictoire. D'où il faudroit conclure, ſelon la Méthode, que le Problême A, B, eſt non-ſeulement poſſible, mais encore capable d'une infinité de ſolutions réelles. Cependant à la ſeule inſpection de ce Problême, on s'aſſûre qu'il n'a aucune ſolution réelle. Ainſi d'un Problême impoſſible A, B, la Méthode en a fait un Problême poſſible E, D, ou E, C, qui a une infinité de ſolutions réelles.

3°. Si

3°. Si de C on dégage y par une diviſion actuelle, on aura F.

$F \ldots y = x + r$.

Et ſi l'on fait la ſubſtitution retrograde de la racine $x = r$, dans ce dégagement F, on aura $y = 2r$, d'où il ſembleroit que le Problême propoſé A, B, ſeroit poſſible, & que $x = r$, avec $y = 2r$ en ſeroient une ſolution.

Ainſi, les deux ſubſtitutions retrogrades produiſent deux differens effets, ſelon les differentes manieres de dégager y, & l'une & l'autre feroient croire que les Egalitez A, B, expriment un Problême réel, quoique ces deux égalitez ſoient imaginaires.

REMARQUE I. Si l'on rejettoit le dégagement D pour prendre le dégagement F qui a été fait par une diviſion actuelle, la réduite n'auroit que des racines imaginaires: ce qui ſeroit conforme au Problême. Mais l'on a vû dans le ſecond Exemple, qu'en dégageant par une diviſion actuelle, la réduite ne renferme auſſi que des racines imaginaires, & que néanmoins le Problême eſt poſſible. Ainſi, cette eſpece de diviſion produit des apparences contraires, quand on ne fait que ce que preſcrit la Méthode en queſtion.

REMARQUE II. Il ſemble dans cette Méthode que les Diviſeurs actuels n'aient point d'autre uſage en comparant deux égalitez pour l'évanouïſſement d'une inconnuë, que d'abreger le calcul. Cette apparence eſt encore plus forte lorſque la diviſion ſe fait par un ſimple effacement d'une autre inconnuë. Cependant il ſe trouve des cas où l'on tomberoit dans un inconvenient conſiderable, ſi l'on rejettoit ces diviſeurs comme on le fait ordinairement, & ſi

l'on négligeoit d'en regler l'uſage. Pour en voir un Exemple, ſuppoſons que l'on veuille conſtruire par la voie ordinaire des effections géometriques, l'égalité marquée *G*.

$$G \ldots x^4 - 4aaxx - 16a^3x - 16a^4 = 0.$$

Et que le premier lieu ſoit *H*.

$$H \ldots yxx + axx = 2aax + 6aay + 4a^3.$$

Alors dégageant xx dans *H* pour faire évanouïr x^4 dans *G*, le réſultat de la ſubſtitution ſe diviſera par y & la diviſion donnera *I*.

$$I. yxx + 2axx + 4axy + 2aax - 5aay - 4a^3 = 0.$$

Qui ſe diviſe encore par $x - a$ & la diviſion donne *K*.

$$K \ldots xy + 5ay + 2ax + 4aa = 0.$$

Ainſi, le ſecond lieu ſeroit l'hyperbole qu'exprime *K*. Mais cet abregement exclut toutes les racines réelles de la propoſée. De maniere, qu'en comparant le premier lieu *H* avec le ſecond lieu *I* ou *K*, pour faire évanouïr y; la réduite qui devroit être la même que *G* ou la renfermer, en ſera fort differente. Car aucune des racines réelles de *G* ne ſe trouvera dans cette réduite; & l'on verra que l'excluſion de ces racines ne vient que de la diviſion qui s'eſt faite en effaçant y du réſultat de la ſubſtitution. Tout au contraire, on verra que la conſtruction donne une racine étrangere que la Méthode a introduite: Que la ſeconde diviſion n'a point détaché cette racine; quoiqu'elle ſoit compriſe dans ſon diviſeur, & que ce diviſeur aiant été rejetté, le ſecond lieu *K* ait demeuré indiviſible.

REMARQUE III. Le deſſein qu'on a eu dans ce Memoire, n'eſt pas de faire voir que les inconveniens de la Méthode en queſtion regardent toutes les Méthodes fondamentales de

la

la Geometrie analytique. J'apporterai ſeulement ici un Exemple ſur les Recherches de *Max.* & *Min.* pour donner occaſion de penſer au reſte.

Si l'on ſe propoſe de trouver les *Max.* & *Min.* de v dans l'Egalité *L.*

$$L \ldots z^4 - 8z^3 + 18zz - 8z + 1 = v.$$

Les Méthodes que les Geométres ont données pour cette recherche fourniront l'égalité *M.*

$$M \ldots z^3 - 6zz + 9z - 2 = 0.$$

De maniere que le Problême exprimé par *L*, *M*, étant réſolu, on aura ce qu'on demande. Et ſi pour le réſoudre par la Méthode en queſtion on fait évanouïr z, elle donnera les deux égalitez *N*, *O*.

$$N \ldots 3zz - 12z + v + 3 = 0.$$
$$O \ldots vz = 2v.$$

Enſorte que pour continuër à faire évanouïr z, il faut la dégager dans *O*, & ſubſtituer ſa valeur dans *N*. Si l'on fait ce dégagement par une diviſion actuelle en effaçant v, on aura $z = 2$, & la ſubſtitution dans *N* donnera la réduite *P*.

$$P \ldots v - 9 = 0.$$

La ſubſtitution retrograde de $v = 9$ ne donne que $z = 2$. D'où il faudroit conclure ſelon la Méthode en queſtion, que le Problême *L*, *M*, n'a point d'autre ſolution que $z = 2$ & $v = 9$. Cependant il en a encore deux qui ſe ſont échapées en effaçant v dans *O* pour le dégagement de z.

Aiant trouvé $z = 2$, par le dernier dégagement, & cette valeur étant connuë, comme elle l'eſt ici, l'uſage ordinaire eſt d'en demeurer là, comme ſi cela donnoit tous les *Max.* & *Min.* Ainſi, ni ſelon cet uſage ni par cette

Méthode, on ne trouveroit pas $z=2\pm\sqrt{3}$, qui donnent deux *Minima* de v dans L. Ce qui n'eſt pas, comme l'on voit, un défaut de celles de *Max.* & *Min.*

REMARQUE IV. Si l'on veut remedier aux inconveniens de la Méthode qui ſont indiquez par les précédens Exemples de ce ſecond article.

1°. On ſe ſervira de diviſions actuelles dans tous les dégagemens autant qu'il ſera poſſible.

2°. On ſuppoſera que chaque diviſeur actuel eſt égal à θ, lorſqu'il renferme quelque inconnuë, & cette égalité avec celle qui précede immédiatement l'égalité diviſée, exprimeront un Problême particulier dont toutes les ſolutions appartiennent au Problême principal ; dans l'hypothêſe que ce Problême n'a que deux égalitez.

Ainſi, dans l'Exemple de la Remarque 3, le diviſeur v donnera $v=\theta$, & cette égalité E avec l'égalité N, formeront le Problême particulier que l'on voit ici en Q.

$$Q\ldots\begin{cases}3zz-12z+v+3=\theta.\\ v=\theta.\end{cases}$$

Dont les deux ſolutions ſont celles que la Méthode avoit excluës du Problême principal L, M.

En formant ainſi un Problême particulier pour chaque diviſeur actuel ; on aura des ſolutions incomplétes dans certains cas. Les ſubſtitutions retrogrades pouſſées juſques aux égalitez du Problême principal, donnent auſſi des valeurs ſuperflues. Mais ces mêmes ſubſtitutions étant réglées ſuivant la Méthode des indéterminées, font connoître les valeurs qu'on doit

doit retenir, & celles qu'on doit rejetter. Ce qui ſuffit pour ne rien échaper du neceſſaire, en attendant que l'on puiſſe donner une Théorie nouvelle & de nouvelles régles pour abreger ces recherches & pour s'aſſurer du ſuccès.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, la Réduite du Problême n'eſt ni réelle, ni imaginaire, ni contradictoire. En faiſant évanouir une des inconnuës, l'autre diſparoit en même temps & ne reçoit aucune détermination. Cependant, ce Problême eſt ou déterminée, ou impoſſible, ſelon le plus ou le moins de grandeur des quantitez qui compoſent les coëfficiens.

Les deux égalitez du Problême ſont A, B.

$A \ldots ay^3 + axxy = bxyy + bx^3$.

$B \ldots ay^3 + axxy = x^4 + xxyy + aayy + aaxx$.

Dégageant y^3 dans A & ſubſtituant ſa valeur dans B, il en réſultera C.

$C \ldots xxyy - bxyy + aayy = -x^4 + bx^3 - aaxx$.

Diviſant C par $xx - bx + aa$, ou actuellement ou intentionnellement à volonté, on aura la valeur de yy, & ſubſtituant cette valeur dans A, on verra que tout diſparoît & que l'on n'a pour la réduite que $\theta = \theta$, qui n'eſt comme l'on voit, ni imaginaire, ni contradictoire ; & l'inconnuë x n'aiant reçu aucune détermination ; il faudroit conclure ſelon la Méthode, que cette inconnuë eſt indéterminée, & que le Problême peut avoir une infinité de ſolutions réelles. Ceſa ſe trouve vrai auſſi ſous de ſemblables indices en bien d'autres Exemples ; mais il y en a encore beaucoup où cela n'eſt

pas, & celui-ci en eſt un. Car la Méthode étant reformée nous verra voir que le Problême eſt déterminé, & que dans un cas il n'a que la ſolution de $y=0$.

REMARQUE I. Pour remedier à l'Inconvenient de cette Méthode qui eſt indiqué par ce 6e Exemple.

1°. On fera le dernier dégagement par une diviſion actuelle, en obſervant quand il y a pluſieurs diviſeurs, de prendre celui qui les renferme tous, & l'on retiendra l'égalité du quotient. Ce qui donne dans cet Exemple l'Egalité D ou E.

$$D \ldots yy=-xx \qquad E \ldots yy+xx=0.$$

2°. On diviſera les deux propoſées A, B, par l'égalité du quotient qui eſt ici l'égalité E, & l'on aura deux autres quotiens. On ſuppoſera que chacun de ces quotiens eſt égal à 0, & l'on aura dans ce même Exemple les deux égalitez F, G.

$$F \ldots bx-ay=0. \qquad G \ldots xx+aa-ay=0.$$

3°. On réſoudra le Problême qu'expriment les deux égalitez telles que F, G, & toutes les ſolutions de ce Problême ſeront des ſolutions du Problême principal. Il eſt évident dans nôtre Exemple que le Problême particulier F, G, ne peut avoir que deux ſolutions: Que ces ſolutions ſont réelles & differentes lorſque b ſurpaſſe $2a$; égales réelles lorſque $b=a$; & imaginaires lorſque $2a$ ſurpaſſe b. C'eſt là tout ce que ce Problême particulier fournit pour le Problême principal A, B.

4°. On réſoudra l'égalité formée du premier quotient (qui eſt auſſi un commun diviſeur des propoſées) & toutes les ſolutions dont elle ſera capable, appartiendront encore au Problême principal. Comme l'Egalité E n'a point d'au-

d'autre ſolution que $y=\theta$, $x=\theta$; c'eſt la ſeule qu'elle peut fournir pour A, B.

REMARQUE II. On a pû voir à l'occaſion de ce 6e Exemple, que la Méthode des indéterminées eſt ſouvent neceſſaire pour diſtinguer le poſſible de l'impoſſible, dans le Problême particulier que fourniſſent les deux quotiens du commun diviſeur, lorſque les égalitez ſont conçûës en termes generaux. On y voit auſſi que cette Méthode eſt neceſſaire pour ſavoir ſi l'égalité de ce diviſeur eſt réelle ou imaginaire, lorſqu'il renferme pluſieurs inconnues, & pour ſavoir encore quand il eſt veritablement determiné, de combien de ſolutions il eſt capable. On aura un Exemple de ce dernier cas, ſi l'on ſe propoſe de conſtruire le Problême qu'expriment les Egalitez H, I.

$$H \ldots 2y^4 - 4ay^3 + 5xxyy - 6axxy + 3x^4 = \theta.$$
$$- 8axyy \qquad - 12ax^3$$
$$+ 10aayy \qquad + 15aaxx$$

$$I \ldots y^4 - 2ay^3 + 2xxyy - 2xxy + x^4 = \theta.$$
$$- 4axyy \qquad - 4ax^3$$
$$+ 5aayy \qquad + 5aaxx.$$

En faiſant évanouïr y, on trouvera que le commun diviſeur donne l'Egalité K,

$$K \ldots xx + yy + 5aa = 4ax = 2ay.$$

On verra qu'en diviſant H & I par K, les deux égalitez que donnent les deux quotiens expriment un Problême imaginaire. En ſorte que le Problême propoſé ne peut avoir d'autres ſolutions que celles de l'Egalité K. Mais par la Méthode des indéterminées, cette égalité K n'a que la ſolution $y=a$, $x=2a$. Ainſi, le Problême propoſé H, I, ne peut avoir que cette ſeule ſolution, malgré les apparences d'in-

détermination que l'on y voit, quand on n'y applique que la Methode en queſtion.

REMARQUE III. Il y a des Exemples où l'on a occaſion d'appliquer la régle que fournit la 4e Remarque du 5e Exemple, avant que de trouver le commun diviſeur, & cette régle conduit à celle de la premiere Remarque du 6e Exemple. Voici comment,

Les deux Egalitez ſoient L, M.

$L \ldots axxy - a^3y = nx^3 - aanx.$

$M \ldots xxyy + aacx = aayy + cx^3.$

Diviſant la premiere par $xx - aa$, on aura $xy = nx$. Et de là N.

$N \ldots y = \frac{nx}{a}.$

Subſtituant dans M, on aura la réduite O.

$O \ldots nnx^4 - aacx^3 - aannxx + a^4cx = 0.$

dont les racines ſont $x = 0$. $x = a$. $x = -a$, & $x = \frac{aac}{nn}$. Ces racines ſubſtituées dans N donnent les 4 ſolutions : $x = 0$; $y = 0$: $x = a$, $y = n$: $x = -a$, $y = -n$: $x = \frac{aac}{nn}$, $y = \frac{ac}{n}$.

C'eſt-là tout ce que donne la Méthode en queſtion.

Mais ſelon la Régle de la 4e Remarque du 5e Exemple, il faut ſuppoſer que le diviſeur actuel $xx - aa$, eſt égal à 0, & prendre l'égalité M où ſe devoit faire la ſubſtitution, pour réſoudre le Problême que ces deux égalitez expriment. Ainſi, il faut réſoudre le Problême P, M.

$P \ldots xx - aa = 0.$

$M \ldots xxyy - aayy + aacx - cx^3 = 0.$

Si y ſe trouvoit dans P, on en pourſuivroit l'é-

l'évanouïſſement. Mais cette égalité ne renfermant pas cette inconnue, elle eſt la Reduite du Problême P, M. Ainſi, ſuivant la Méthode, il faut ſubſtituer les Racines de P dans M. Si l'on y ſubſtitue $x = a$, ou $x = -a$, on trouvera $\theta = \theta$. Ce qui marque que les deux égalitez P, M, ont un commun diviſeur, & que ces deux racines y ſont compriſes. Ou, plus généralement, que ces égalitez ont un diviſeur commun qui renferme l'inconnue x. Ainſi, comparant ces deux Egalitez pour faire évanouïr x, on auroit ce commun diviſeur, ſuivant la Regle de la premiére Remarque du 6e Exemple. Il ſe trouve ici que ce diviſeur eſt le même que P, & par la même régle toutes les ſolutions qui lui conviennent, conviennent auſſi au Problême principal L, M. Or $x = a$ & $x = -a$ réſolvent P. Donc ces deux valeurs réſoudront L, M; & comme y ne reçoit aucune détermination dans P, il n'en recevra aucune dans L, M. De maniere qu'en prenant $x = a$, ou $x = -a$, à volonté, & pour y une grandeur arbitraire; on aura la ſolution du Problême propoſé L, M. Ainſi $x = a$ & $y = m$, en ſont une ſolution : $x = -a$, $y = r$, une autre ſolution, &c.

Il faudroit encore ſuivant les Régles prendre le Problême qui ſe forme en diviſant P, M, par P, mais un des quotiens donne $1 = \theta$. Ce qui rend ce Problême inutile, & indique un abregement de ces Régles. On peut voir auſſi que $xx - aa$ étant un diviſeur de P, M; il doit l'être du Problême principal L, M. Ce qui fournit une autre maniére de réſoudre ce Problême & ſes ſemblables.

REMARQUE IV. En transformant les Problê-

mes de Géometrie en Problêmes d'Algebre, il arrive en certains cas, que le Problême algebrique eſt indéterminé, quoique le Problême propoſé ſoit determiné. Par exemple, ſi l'on ſe propoſe la recherche des *Max.* ou *Min.* de x dans l'Egalité *A*.

$$A \ldots \left.\begin{array}{l} cy^6 - 2acxy^4 + aacxxyy - aax^5 \\ +2abcy^4 - 2aabcxyy + 2aabx^4 \\ - x^3y^4 + aabbcyy - aabbx^3 \\ + 2ax^4yy - 2abx^3yy \end{array}\right\} = \theta.$$

Les Méthodes les plus génerales de *Max.* & *Min.* donneront l'Egalité *B*.

$$B \ldots \left.\begin{array}{l} 6y^5 - 8acxy^3 + 2aacxxy + 8abcy^3 \\ - 4aabcxy - 4x^3y^3 + 2aabbcy \\ + 4ax^4y - 4abx^3y \end{array}\right\} = \theta.$$

Selon ces Méthodes la réſolution du Problême *A*, *D*, doit donner tous les *Max.* & *Min.* de x dans *A*. Mais on n'y fait pas mention des cas où de tels Problêmes ſe trouvent indéterminez, & c'en eſt ici un Exemple. Car en faiſant évanouïr x ou y à volonté, on trouvera $\theta = \theta$, & un commun diviſeur qui donne l'égalité *C*.

$$C \ldots yy - ax + ab = \theta.$$

de maniere qu'en prenant y à volonté, on aura toûjours une valeur de x, & que ces deux valeurs ſeront toûjours une ſolution du Problême *A*, *B*.

Les deux quotiens que donne ce diviſeur fourniſſent le Problême particulier *D*, *E*.

$$D \ldots cy^4 - acxyy + ax^4 + abcyy - abx^3 - x^3yy = \theta.$$
$$E \ldots 6cy^3 + 2abcy - 2acxy - 4x^3y = \theta.$$

Parmi les Solutions de ce Problême on trouve que $y = \theta$ donne $x = b$ & $x = \theta$, qui ſont deux *Min.* de x dans l'Egalité *A*. Comme cette inconnue n'a point d'autres *Min.* ni aucun

Max.

Max. dans cette égalité, on peut dire que le Problême particulier fournit tout ce que l'on demandoit du Problême principal, & c'eſt là un moien pour réſoudre la difficulté en pareils cas.

De plus, en appliquant la Méthode *de Max.* & *Min.* au commun diviſeur, tous les *Maxima* & *Minima* que l'on y trouvera, appartiennent à la propoſée *A*. Ainſi, dans nôtre Exemple, cette Méthode appliquée à *C* donne $2y = \theta$; & ſubſtituant θ au lieu de *y* dans la même *C*, on aura $x = b$ qui eſt un *Minima* de *x* pour *A*. Et comme $y = \theta$ avec $x = b$ ſont une Solution du Problême *D*, *E*, on peut s'en ſervir pour trouver fort vîte les autres Solutions de ce Probleme: de maniere que le principal *A*, *B*, ſe trouvant indéterminé, on peut toûjours tirer avantage de l'indétermination pour abreger le calcul.

La raiſon de cette Indétermination eſt, que la Méthode de *Max.* & *Min.* eſt fondée ſur les racines égales & qu'il y en a une infinité, tantôt réelles & tantôt imaginaires, dans cette eſpece de Problemes. Auſſi l'on verroit en conſtruiſant les Courbes qu'expriment *A*, *B*, que toutes les appliquées de celle que fournit leur commun diviſeur *C*, ſont tirées des racines communes à ces deux égalitez, & que c'eſt en cela que conſiſte l'indétermination.

On peut voir auſſi la raiſon du choix des veritables Solutions, en appliquant la Methode *de Max.* & *Min.* à chacun des diviſeurs primitifs de *A*; & il eſt facile ſur le détail qu'on vient de voir, de former une Régle qui abrége la recherche de ces diviſeurs.

Il y a d'autres difficultez ſur cette Methode, lorſque les Expoſans de la Propoſée ſont con-

çus en termes géneraux. Par exemple la Proposée étant F,

$$F \ldots a^r x^n - y^e x^m - b^l = 0.$$

Et voulant trouver les *Max.* ou *Min.* de y, on aura l'Egalité G,

$$G \ldots na^r x^{n-1} - my^e x^{m-1} = 0.$$

Comparant ces deux Egalitez pour faire évanouïr y, la seconde donnera $y^e = \frac{na^r x^{n-1}}{mx^{m-1}}$.

Subſtituant cette valeur dans la premiere (en abregeant la fraction qu'on voit naître dans le réſultat) on trouvera la réduite H,

$$H \ldots ma^r x^n - na^r x^n - mb^l = 0.$$

Cela poſé, ſi l'on fait $a = 1$. $e = 1$. $l = 1$. $r = 1$. $2m = 1$. $n = 1$. on verra qu'il faut avoir égard aux differentes valeurs dont les Expoſans ſont capables, quand on ſe ſert de la Méthode de *Max.* & *Min.* Je ne propoſe ce petit Exemple que pour donner lieu de penſer aux difficultez dont il eſt un indice. La 4e Remarque du 5e Exemple & la 1re du 6e Exemple demandent encore de nouvelles Regles, lorſque les Expoſans & les Coëfficiens ſont exprimez en termes géneraux, pour marquer les chûtes de l'inconnue où il arrive que la détermination de ces Expoſans & de ces Coëfficiens donnent des Réduites ou Formules particulieres qui déſignent des exceptions de la Réduite génerale: ce qui eſt ſouvent neceſſaire quand on applique l'Algebre à la Géometrie.

REMARQUE V. Il y a une Méthode pour faire évanouïr les Inconnues, qui paroît differente de celle que nous avons examinée ici & qui eſt en uſage dans la combinaiſon des lieux.

Il

Il ne paroît dans cette Méthode ni dégagement ni ſubſtitution. On y multiplie les deux Egalitez que l'on compare, de maniere que le premier terme de l'Inconnue qu'on veut faire évanouïr, ſoit le même dans les deux Egalitez qui réſultent de ces multiplications, afin que ce terme s'évanouïſſe en prenant leur difference. Quand on y diviſe les Propoſées ou les Réſultantes, cela ne ſe fait ordinairement que pour abreger le calcul, & alors on rejette les Diviſeurs. Il ſe trouve auſſi que les inconveniens ſont les mêmes que ceux que nous avons marquez ici dans la Méthode en queſtion, quand on ne fait aucune diviſion dans l'une ni dans l'autre, & quand on fait dans chacune des diviſions équivalentes: en ſorte qu'il eſt aiſé d'appliquer les Remarques de ce Memoire à la Méthode où les dégagemens & les ſubſtitutions ſe couvrent, pour en reconnoître les inconveniens & pour les éviter; dans l'hypothêſe que les Problêmes propoſez n'ont que deux égalitez & deux inconnues, & que ces égalitez dans leur premier état, ne ſont affectées ni de fractions ni de ſignes radicaux, ſelon ce que j'en ai dit au commencement de ce Memoire.

Meſ-

Meſſieurs de la SOCIETE' ROYALE DES SCIENCES *établie à* Montpellier, *ont envoyé à l'Academie l'Ouvrage qui ſuit, pour entretenir l'union intime qui doit être entr'elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordez par le Roi au mois de Fevrier* 1706.

OBSERVATIONS

Sur l'Evaporation qui arrive aux Liquides pendant le grand froid: Avec des Remarques ſur quelques effets de la Gelée.

PAR M. GAUTERON.

ON eſt accoûtumé à regarder l'Evaporation des Liquides comme un effet de la chaleur ou du mouvement de l'air qui les environne; mais il paroît ſurprenant qu'une cauſe toute oppoſée produiſe à peu près le même effet, & que les liquides perdent beaucoup plus de leurs parties pendant la plus forte gelée, que pendant que l'air eſt dans un état moien entre le grand froid & le grand chaud, c'eſt à dire quand il eſt dans l'état qu'on appelle temperé.

C'eſt pourtant ce que j'ai remarqué dans le tems de la grande gelée de cet hiver. J'ai obſervé, que plus le froid a été grand, plus l'é-

va-

vaporation des liqueurs a été conſiderable, & que la glace même qui étoit formée depuis quelques jours, diminuoit conſiderablement, & autant à proportion, que les liqueurs qui réſiſtoient à la gelée.

Ce fut le 12e Decembre 1708, que la gelée commença à *Montpellier*; le vent étoit au Nord ¼ de Nord-Eſt, (c'eſt ordinairement le vent de Nord, ou le vent de Nord un peu déclinant vers l'Eſt ou vers l'Oüeſt qui regne dans ce païs-ci pendant la gelée). Ce fut donc le 12 Decembre 1708, * le Thermometre ordinaire étant au 10e degré de ſa graduation, & celui de M. *Amontons* au 53e degré quelques lignes, que j'expoſai à la gelée à 6 heures du ſoir une once d'eau commune, que j'avois miſe dans un gobelet de porcelaine. Elle fut totalement gelée dans la nuit; le lendemain à 8 heures du matin, je peſai le culot de glace, & je trouvai que l'eau en ſe gelant avoit diminué de 24 grains. Cette diminution étoit très-réelle, puiſque la glace étant fondue, l'eau ſe trouva encore diminuée de 12 grains, quelque précaution que je puſſe prendre pour éviter cette ſeconde évaporation qui me paroiſſoit preſque inévitable.

La même Experience repetée quelques jours de ſuite, me donna à peu près la même choſe, avec cette difference pourtant, que l'évaporation étoit beaucoup plus grande quand la nuit étoit orageuſe, ou que le vent de biſe ſouffloit un peu fort.

Le

* *L'un & l'autre Thermometre ont toûjours été dans un cabinet expoſé au Nord, & les vitres du cabinet ont toûjours été fermées.*

Le dégel qui arriva pour lors ne me permit pas de pouſſer plus loin mes experiences; mais la gelée qui revint bruſquement la nuit du 6 au 7 de Janvier, me donna lieu de faire celles que je vais raporter.

J'expoſai au grand froid la nuit du 7 au 8, de l'eau commune, de l'eau de vie, d'huile d'olive, d'huile de noix, d'huile de therebentine, & du mercure, une once de chacune de ces liqueurs; le Thermometre ordinaire étoit au 2e degré de ſa graduation, & celui de M. *Amontons* à 51 degré 6 lignes; l'eau fut bientôt gelée, & diminua dans une heure de 6 grains, l'huile de noix diminua de 8, l'eau de vie, & l'huile de therebentine, de 12 chacune dans le même tems d'une heure; & l'huile d'olive & le mercure me parurent avoir plûtôt augmenté que diminué de leur poids. Le lendemain matin la diminution de l'eau gelée fut de 36 grains. celle de l'huile de noix qui ne gela point, de 40, celle de l'eau de vie & de l'huile de therebentine, qui réſiſterent auſſi à la gelée, de 54 chacune. Le mercure & l'huile d'olive reſterent à peu près au même état.

Il eſt inutile de marquer jour par jour l'évaporation que le grand froid a produite, puiſque toutes choſes étant d'ailleurs égales, l'évaporation a été à peu près la même; le grand froid & les vents en ont toûjours produit une plus grande, que le moindre froid & le tems calme.

Il eſt neceſſaire de remarquer que la glace la plus ferme n'eſt pas exempte d'évaporation dans le grand froid, comme je l'ai déja dit. Elle a diminué de 36 grains depuis huit heures du matin juſqu'à une heure après midi, & de 36 grains encore depuis une heure après midi juſqu'à

8 heures du ſoir. L'évaporation de la nuit a été à peu près de la même quantité, c'eſt à dire, que la glace a ſouffert environ 100 grains de diminution dans 24 heures, quoiqu'elle puiſſe paſſer pour un corps aſſez ſolide ; & cela dans un tems qui ſemble plus propre à la reſſerrer qu'à enlever les moindres de ſes parties. Toutes ces épreuves ont été faites ſur une once de liqueur, poids de marc, & dans des gobelets qui avoient deux pouces de diametre.

Je remarquerai pourtant que la nuit du 10 au 11 de Janvier, a été la plus froide qu'on ait jamais ſentie dans ce païs-ci : la liqueur du Thermometre ordinaire plongea tout à fait dans la boule ; celui de M. *Amontons* étoit au 51 degré 1 ligne, qui eſt preſque le grand froid du 8e climat : dans les maiſons les mieux étoffées on ſentoit un froid très-cuiſant dont on avoit peine à ſe garentir ; & peu de perſonnes pûrent dormir d'un bon ſomme, malgré toutes les précautions qu'elles avoient pû prendre pour ſe mettre à couvert du grand froid.

L'Evaporation des Liquides pendant cette nuit fut fort conſiderable ; l'eau commune diminua de 48 grains, l'huile de noix de 54, & l'huile de therebentine & l'eau de vie de 72.

Voilà en abregé ce que j'ai obſervé ſur l'évaporation des Liquides pendant le grand froid ; & voici ce que j'ai remarqué ſur la Gelée.

1°. Que la ſuperficie de l'eau qui ſe gele paroît toute ridée, & que ces rides forment tantôt des lignes paralleles, & tantôt des raions qui paroiſſent aller du centre à la circonference ; & quand on la fait geler dans un vaiſſeau de verre cylindrique, j'ai obſervé qu'il ſe forme tout autour du cylindre, des tuiaux fiſtuleux

leux diſpoſez de bas en haut, & qui paroiſſent aller de la circonference au centre.

2°. Que l'eau couverte d'huile par-deſſus & par les côtez, a gelé environ demie heure plus tard que l'eau expoſée à l'air ſans précaution, & en ſe gelant elle a formé un champignon de glace relevé d'un pouce au deſſus de la ſuperficie de l'huile.

3°. Que l'huile de noix a garanti l'eau d'une gelée mediocre, ce que l'huile d'olive n'avoit pas pû faire.

4°. Que l'eau chaude & prête à bouillir, a gelé plus tard d'environ demie heure que l'eau naturelle.

5°. Que l'eau de vie, l'huile de noix, & l'huile de therebentine n'ont point gelé du tout.

6°. Que pendant la gelée, quoique le ciel fut fort ſerein, le ſoleil paroiſſoit un peu pâle.

7°. Que les Orangers & les Oliviers ont perdu leurs feuilles & leurs branches: que la plus grande partie de ces arbres ſont morts juſqu'à la racine, & ce que l'on n'avoit jamais vû dans ce Païs-ci, les Lauriers, les Figuiers, les Grenadiers, les Jaſmins, les Yeuſes, & quelques Chênes même, ont eu le même ſort. Le *Rhône* a été gelé juſqu'à la hauteur de 12 pieds par les couches de glace qui s'y ſont amaſſées; & l'Etang de *Thau* ordinairement fort orageux & qui communique à la Mer par un court & large canal, s'eſt pris de bout à bout, & pluſieurs perſonnes ſont allées des Bains de *Balaruc* & du lieu de *Bouſigues* juſqu'à *Sette* par-deſſus la glace; route inconnuë à nos peres, & qui le ſera peut-être long-tems à nos neveux.

8°. Enfin, que le dégel du 23 Janvier comme celui du 26 Fevrier ont été ſuivis d'un Rhume

me Epidemique dont preſque perſonne n'a été exempt.

Tous ces faits doivent être déduits de la même cauſe, c'eſt à dire du changement qui arrive à l'air pendant la gelée. Voici ſuivant moi quel eſt ce changement.

Dans l'hiver le Soleil ne jette que des raions obliques ſur la Terre, & cette obliquité de raions par raport à la partie de la Terre qui a l'hiver, fait qu'ils y occupent une plus grande étenduë, & qu'ils ſe reflechiſſent moins ſur eux-mêmes. Il ſuit de-là, que la ſuperficie de la Terre qui a l'hiver, doit être moins échauffée, & que la matiere étherée qui a le plus de force, doit ſe mouvoir du côté où le Soleil eſt le plus perpendiculaire à la Terre. Il ne doit donc reſter à la partie de la Terre qui a l'hiver, que la matiere étherée la moins propre au mouvement.

Or tout le monde convient, que la matiere étherée eſt la cauſe du mouvement des liquides, & que l'air même ne peut recevoir ſon mouvement d'ailleurs. Donc tous les liquides doivent reſter dans un état d'engourdiſſement ou d'épaiſſiſſement, dès que cette matiere perd une partie de ſa force. L'air par conſéquent doit être plus condenſé en hiver que dans aucune autre ſaiſon de l'année.

Mais on eſt convaincu par pluſieurs experiences, que l'air contient un ſel que l'on croit être d'une nature approchant de celle du nitre. Cela étant, & l'épaiſſiſſement de l'air ſuppoſé, je dis que les molecules de ce nitre doivent ſe raprocher & groſſir par la condenſation de l'air, comme au contraire l'augmentation du mouvement de ce fluide doit les diviſer. Si la même

cho-

choſe arrive à toutes les liqueurs qui ont diſſous quelque ſel, ſi la chaleur du liquide tient ce ſel exactement diviſé, & ſi la fraîcheur d'un lieu ſouterrain, ou de la glace donne lieu aux molecules du ſel diſſous de ſe raprocher, de groſſir & de ſe cryſtalliſer; pourquoi l'air capable de rarefaction & de condenſation, ſeroit-il exempt de cette loi générale? Pour être plus ſubtil, en eſt-il moins de la nature des autres fluides?

Si le nitre de l'air eſt plus groſſier pendant le grand froid, comme on n'en ſauroit diſconvenir, il doit avoir veritablement moins de viteſſe; mais le produit de ſa maſſe augmentée, par la viteſſe qui lui reſte, lui doit donner pourtant une plus grande quantité de mouvement.

Il n'en faut pas davantage pour faire agir ce ſel avec plus de forces contre les parties des fluides, & je crois que c'eſt-là la veritable cauſe de la grande évaporation qu'ils ſouffrent pendant le grand froid.

Cependant ce nitre aërien ne doit pas empêcher les liquides de ſe changer en glace; il doit au contraire en hâter mediatement la concretion. Car ce n'eſt pas l'air & le nitre qu'il contient, qui donne le mouvement aux liquides, c'eſt la matiere étherée. C'eſt donc de la moindre force de celle-ci que dépend la perte ou la diminution de mouvement des autres. Or la matiere étherée déja foible pendant l'hiver, doit encore perdre beaucoup de ſa force en agiſſant contre l'air condenſé, & chargé de plus groſſes molecules de ſel, la matiere étherée doit donc s'affoiblir encore pendant le grand froid, & être moins en état d'entretenir le mouvement des liquides. En un mot, on peut regarder l'air pen-

pendant la gelée, comme la glace chargée de sel dont on se sert pour faire glacer certaines liqueurs pendant l'été. Ces liqueurs gelent vraisemblablement par la diminution de mouvement de la matiere étherée qui agit contre la glace & le sel mêlez ensemble, & l'air tout brûlant qu'il est dans ce tems-là, ne peut point empêcher cette concretion.

On dira peut-être que les Liquides contiennent beaucoup de parties d'air, lesquelles sont dans un état de compression dix fois plus fort dans les liquides, que dans l'air libre, suivant les Observations de M. de *Mariotte* de l'Academie Royale des Sciences; que les ressorts de l'air ainsi comprimez se débandent pendant la gelée par la diminution & mouvement du liquide; & que c'est à l'explosion de ces ressorts, d'autant plus forte qu'ils sont plus comprimez, qu'on doit raporter l'évaporation des parties des liquides pendant la gelée.

Je ne disconviens pas que les liquides contiennent beaucoup d'air, que cet air est plus comprimé dans les liquides que dans l'air libre; que la gelée donne occasion à ses ressorts de se débander, ni que ses ressorts se débandent avec plus de force à cause de l'état de compression dans lequel ils sont; puisque je crois que ce *débandement* des ressorts de l'air produit la rarefaction & la legereté de la glace, aussi-bien que les bulles & les fistules dont j'ai parlé dans mes Remarques. Mais j'ai peine à me persuader, que l'action de ces ressorts soit la cause de l'évaporation, quand je considere que les liquides qui gelent & ceux qui résistent à la gelée, souffrent une évaporation proportionnée à la tenuité de leurs parties, & que la glace formée

mée depuis quelques jours diminuë autant ou plus que l'eau qui commence à ſe geler. Dans les liquides qui ne gelent point, le *débandement* des reſſorts de l'air ne doit pas être fort conſiderable, & dans la glace formée depuis quelques jours, ces reſſorts doivent avoir fait tout leur jeu, & n'être plus capables d'aucune action.

J'ai remarqué que quand la glace commence à ſe former, il paroît à ſa ſuperficie des rides, diſpoſées quelquefois en lignes paralleles, & quelquefois en manieres de raions: on voit au deſſous de cette ſuperficie un grand nombre de petites parties gelées en forme d'aiguilles attachées par la pointe, & qui forment des eſpeces d'entonnoirs dont le bout le plus délié eſt tourné vers la ſuperficie de l'eau. On remarque très-diſtinctement ces petits entonnoirs dans une bouteille cylindrique, lorſque le liquide qu'elle contient eſt entierement gelé.

Je dis que cette diſpoſition de la glace qui commence à ſe former, favoriſe la ſortie de l'air qui eſt contenu dans l'eau & dont les reſſorts commencent à ſe débander, & ſemble défendre en même tems l'entrée à l'air exterieur qui pourroit aller prendre la place de celui qui ſort du liquide. L'air qui reſte dans l'eau qui ſe gele doit donc ſe dilater plus librement, n'étant plus comprimé par l'air exterieur; c'eſt de là vraiſemblablement que vient la rarefaction & la legereté de la glace, mais non pas l'évaporation de ſes parties.

Je ſerois trop long ſi j'allois expliquer en détail tout ce que j'ai obſervé ſur la gelée, outre qu'il eſt très-aiſé de le déduire des principes que j'ai déja poſez. On voit bien par exemple, que

que l'huile d'olive a ſes parties plus branchues que l'huile de noix, que c'eſt à cauſe des branches qui en tient exactement les parties, que le nitre aërien ne ſauroit les enlever. Que l'huile de noix a ſes parties plus groſſes, mais moins branchues que celles de l'huile d'olive; que c'eſt pour cela que l'huile de noix eſt plus peſante & qu'elle ſéche plus vîte. D'ailleurs l'huile de noix doit avoir ſes parties liſſes, polies & qui ne ſe touchent que par peu de points de leur ſuperficie; ce qui fait que la matiere étherée toute foible qu'elle eſt, peut les mouvoir aiſément & empêcher cette huile de ſe geler; mais ces parties ne ſont pas aſſez fortes pour reſiſter à l'impulſion du nitre aërien qui les enleve. On voit auſſi que la tenuité des parties de l'eau de vie & de l'huile de therebentine, favoriſe leur fluidité & leur évaporation; & pour les parties globuleuſes & peſantes du mercure, il eſt clair qu'il faudroit un agent plus fort que le nitre de l'air pour pouvoir les ſeparer de leur maſſe.

Puiſque la matiere étherée entretient toûjours la fluidité de l'huile de noix, ce n'eſt pas merveille ſi l'eau qui en eſt couverte, réſiſte à la gelée. L'huile de noix eſt pour lors comme une eſpece de filtre qui donne entrée à une grande quantité de cette matiere, laquelle ſuffit à entretenir la fluidité de l'eau. Si l'huile d'olive défend l'eau de la gelée pendant un peu de tems, c'eſt auſſi à cauſe que cette huile, qui ne fait que s'épaiſſir par le froid, contient dans ſes branches un peu de cette matiere étherée, ce qui fait que l'eau couverte d'huile d'olive réſiſte un peu plus au froid que ſi elle étoit privée de ce petit ſecours. Si l'eau chaude a gelé demi-heure plus tard, c'eſt qu'il a fallu plus long-

tems pour y faire perdre le mouvement que le feu y avoit imprimé. Et ſi pendant la gelée le Soleil paroît plus pâle, qui ne voit que l'épaiſſiſſement de l'air, & la groſſiereté du nitre qu'il contient, doivent faire réflechir beaucoup de raions, & les empêcher de pénetrer juſqu'à nous. Enfin s'il paroît une eſpece de gangrene aux parties des arbres & des plantes qui ont été gelées, cette pourriture ne doit-elle pas être l'effet d'un ſel corroſif qui en a corrompu la tiſſure. Il y a tant de raport, entre cette gangrenne qui arrive aux plantes par la gelée & celle qui arrive aux parties des animaux, qu'elles doivent avoir une cauſe fort analogue, les humeurs corroſives brûlent les parties des animaux, le nitre aërien plus groſſier qu'à l'ordinaire fait le même effet ſur les parties des Plantes, *Penetrabile frigus adurit.*

Je finirai ce Memoire en faiſant quelques reflexions ſur les Rhumes Epidemiques qui ſuivirent le degel du 23 Janvier & du 26 Fevrier de cette année. Tant de perſonnes en furent ſaiſies tout à la fois, qu'on ne peut raporter cette maladie qu'à une cauſe generale qui ait agi en même tems ſur tous les hommes. Nous trouverons cette cauſe dans l'air que l'on reſpira après le dégel, ſon nitre avoit été déja diviſé, & avoit repris à peu près ſa forme naturelle. Je m'explique: l'air qui eſt porté dans les poûmons par la trachée artere, remplit les veſicules dont ce viſcere eſt compoſé; le ſang ne tombe jamais dans ces veſicules que par une diſpoſition contre nature; cependant le ſang de la veine du Poûmon plus animé & plus vermeil que celui de l'artere, marque qu'il a reçû un changement conſiderable par l'air de la reſpira-

piration ; mais l'air n'agit pas ſur le ſang immediatement, il faut donc que le tiſſu des veſicules pulmonaires ſoit une eſpece de filtre qui ſépare la partie nitreuſe de l'air, & que ce ſoit cette partie nitreuſe qui anime le ſang de la veine pulmonaire.

S'il arrive donc que le nitre de l'air ſoit plus groſſier qu'à l'ordinaire, comme nous avons prouvé qu'il le doit être pendant le grand froid, je dis que pour lors il n'aura plus la même proportion avec le filtre qui devoit le ſéparer ; qu'il ne s'en mêlera qu'une petite quantité avec le ſang ; & cela joint avec le froid exterieur fera que ce fluide reſtera dans une eſpece d'engourdiſſement. Dans cet état, & les voyes de la tranſpiration n'étant pas libres, le ſang doit retenir beaucoup de parties ſereuſes & lymphatiques qui demeureront envelopées dans ſes parties ſulphureuſes, & dont il ne pourra ſe débaraſſer que par une fonte generale. Cette fonte d'humeurs doit arriver par le dégel. Dans ce tems-là le nitre ſe diviſe en petites molecules, une grande quantité de ce ſel ſe mêle bruſquement avec le ſang, l'anime & le fermente ; il n'en faut pas davantage pour faire ſéparer tout à coup une grande quantité de lymphe & de ſeroſité qui ſe jette ſur toutes les glandes du corps & produit le mal de tête, le dégoût, l'*enchiffrenure*, la toux, la crudité & l'abondance des urines, la laſſitude qu'on appelle ſpontanée, & quelquefois un peu de fiévre.

Le Rhume que je viens de décrire eſt fort different de celui qui arrive pendant le grand froid ; dans celui-ci les humeurs circulent avec peine, & par leur épaiſſiſſement donnent occaſion à quelques parties ſereuſes de s'en ſéparer,

ce qui produit la roupie & la toux, qui ſont ſouvent accompagnées d'un larmoiement involontaire, parce que les points lacrymaux ſe trouvent quelquefois bouchez par l'épaiſſiſſement de la mucoſité qui ſe ſépare dans le nez. Auſſi doit-on traiter ces rhumes d'une maniere bien differente ; les rhumes de froid ſe gueriſſent par des remedes qui peuvent donner de la fluidité aux humeurs ; ceux qui ſont enchiffrenez pendant le grand froid, gueriſſent plus promptement par le parfum de Karabé que par aucun autre remede que je connoiſſe, ſans doute à cauſe de la quantité de ſel & de ſouffre volatil que cette reſine contient. Le vin & l'eau de vie brûlez avec du ſucre, le Thé, le Caffé, & le Chocolate conviennent par la même raiſon, & j'ai gueri pluſieurs rhumes cet hiver très-violens & très-opiniâtres avec des bouillons de poulet, dans leſquels je faiſois bouillir pendant un quart-d'heure, une once de chair de ſerpent ſechée avec une poignée de feuilles de creſſon.

Les Rhumes du degel doivent être traitez d'une maniere toute differente. Il faut empêcher la trop grande fonte des humeurs par les émulſions cuites, les crêmes de ris, de gruau, d'orge, par l'eau de ſon, l'eau roſe & le jaune d'œuf avec le ſucre candi, par le petit lait & par le lait même. Les Narcotiques & la ſaignée conviennent aux deux eſpeces de rhume, ſur tout quand les malades ſont fatiguez de la Toux, & que l'on craint quelqu'inflammation de poitrine.

Voilà quelle eſt l'idée que j'ai de la gelée & de ſes effets. De l'obliquité du Soleil par raport à la partie de la Terre qui a l'hiver, j'ai con-

conclu que la matiere étherée qui répond à cette partie de la Terre, doit avoir moins de force ; de-là, la condenſation des fluides ; de l'air même, & l'augmentation des molecules du nitre. De cette augmentation l'évaporation des liquides, la mortification des plantes & l'épaiſſiſſement du ſang. Tout cela paroît aſſez ſimple & puiſé dans la Nature même ; cependant je ſuis très perſuadé qu'il faut faire encore beaucoup d'experiences ſur le même ſujet pour avoir quelque choſe de plus certain. Si le Syſtême eſt veritable, elles s'y rangeront toutes comme autant de conſéquences neceſſaires, & pour lors on pourra ſe flatter qu'on a fort approché de la verité.

Fin des Memoires de l'Année 1709.

CATALOGUE
DES LIVRES,

Qui ont été imprimez en 1709, & qui se trouvent à Amsterdam chez PIERRE DE COUP à un prix raisonnable.

A.

ABregé de l'Histoire d'Espagne & de France par demandes & par réponses. Sec. Edition. 12.
Academie Galante. II. Partie. 12.
Agnès de Castro. Nouvelle Portugaise. N. Ed. 12.
Alpinus (Prosper) *de præsagienda vita & morte ægrotantium cum Præfatione* Herm. Boerhave. 4.
l'Amour degagé, ou les Avantures de Fremal & de D. Garcie, Gentilshommes natifs de Valence. 12.
Ancillon, Memoires concernant les Vies & les Ouvrages de plusieurs Modernes célébres dans la Republique des Lettres. 12.
l'Ange Conducteur dans la devotion Chrétienne. 8.
Antonini *Iter Britanniarum cum Comment.* Th. Gale. *Accedit Anonymi Ravennatis Britannia Chorographia.* 4. Lond.
Apicii Cœlii *de Opsoniis sive Arte Coquinaria cum Notis* Mart. Listeri *& variorum. Editio Sec. auctior & emendatior.* 8.
Arnold (Jo. Bern.) *Conciones in omnes Anni Dominicas.* 4.
Ars metrica, sive Ars condendorum eleganter versuum. 12.
Athenagoræ *Legatio pro Christianis & de Resurrectione Mortuorum. Græc. Lat. cum Notis, Cura* Ed. Dechair. 8. *Oxoniæ.*

B.

BArbeyrac (Jean) Traité du Jeu où l'on examine les principales Questions du Droit Naturel & de la Morale par raport à cette Matiere. 2 Voll. 8.
Barchusen (Jo. Conr.) *Historia Medicina usque ad nostra Tempora.* 8.
Basnage (Jaq.) Entretiens sur la Religion. 8.
Bayer (Jac.) *Lexicon Latino-Græcum.* 8.
le Beau jour de la Haye. 12.

Bec-

Becmanni (Jo. Chriſtoph.) *Analecta Hiſtorica de variis rebus ab Orbe Condito uſque ad tempora Conſtantini Magni.* 4.

Benderi (H. D.) *Spiritus Prophetiæ, ſeu Teſtimonium Jeſu demonſtratum.* 4.

Bergerac (Cyrano de) ſes Oeuvres. N. Ed. 12.

Bergeri (Jo. Goth.) *Phyſiologia Medica, ſive de Natura Humana.* 4.

Bergeri (Jo. Henr.) *Annotationes in* Lancelotti *Inſtitutiones Juris Canonici, ad eaſque* C. Ziegleri *Animadverſiones.* 4.

Bieſman (Caſp.) *Doctrina Moralis in compendium redacta.* 12.

Boecleri (Jo. Henr.) *de Scriptoribus Græcis & Latinis ab Homero ad initium Seculi XVI. Commentatio poſthuma.* 8.

Boerhave (Herm.) *Oratio de uſu ratiocinii Mechanici in Medicina. Editio altera.* 8.

——— *Oratio qua repurgata Medicina facilis aſſeritur ſimplicitas.* 4.

Bonafous, Patterre du Parnaſſe François, ou nouveau Recueil des Pieces les plus rares & les plus curieuſes. 12.

Borhanneddin, *Enchiridion Arabicè conſcriptum cum duplici verſione Latina* Frid. Roſtgaerd & Abrahami Ecchellenſis *editum ab* Hadr. Relando. 8.

Bouhours (le P.) la Maniere de bien penſer dans les Ouvrages d'Eſprit. Nouv. Ed. 12.

Bourdaloue (le P.) Sermons ſur les Myſteres. 2 voll. 12.

Broſſard (Sebaſt.) Dictionaire de Muſique. 8.

Brunnemannus (Jo.) *de Jure Eccleſiaſtico. Ed. N.* 4.

Brunſmanni (Jo.) *De Accentuationis Hebraïcæ diſtinctiva novella Arte Diſſertatio.* 8.

Buddei (Fr.) *Diſquiſitio de Moderamine inculpatæ Tutelæ in certaminibus Theologorum cum obſervationibus Apologeticis.* 8.

Buffier (le P.) Grammaire Françoiſe ſur un Plan nouveau. 12. *Paris.*

——— Pratique de la Memoire Artificielle pour aprendre & retenir l'Hiſtoire & la Chronologie univerſelle. 4 voll. 12.

Burgundi (Nic.) *Hiſtoria Belgica ab anno 1558. cum Præfatione* Nic. Hier. Gundlingii. 4.

——— *Hiſtoria Bavarica cum Præfatione* J. Chriſt. Böhmer. 4.

Buſenbaum (Herm.) *Theologia Moralis, pluribus aucta à Cl.* La Croix *Tom. quintus.* 8.

Bynkershoek (Corn. van) *Obſervationes Juris Rom. in quibus plurima Juris Civilis aliorumque Auctorum loca explicantur & emendantur.* 4.

C.

Cælius Aurelianus *de Morbis acutis & chronicis ex recenſione* Jo. Corn. Ammanni. *Accedunt* Th. J. Almeloveen *Notæ, ut & Lexicon Cælianum.* 4.

Campagne de Lille, avec le plan du Siege & celui de Wynendael. 12.

Carpzovii (Ben.) *Proceſſus Juris in Foro Saxonico. Ed. V.* Fol.

——— *Practica nova Imperialis Saxonica Rerum Criminalium. Ed. X.* Fol.

Caſaubonorum *Epiſtolæ & ad eas Reſponſiones. Accedunt Præfationes, Dedicationes, Poëmata & Fragmentum de Libertate Eccleſiaſtica ut & Iſaaci Vita. Curante* Theod. Janſſ. ab Almeloveen. *Fol.*

Caſtelli (Nic.) Dizzionario Italiano-Tedeſco e Tedeſco-Italiano. 4.

Cave (Guill.) La Religion des anciens Chrétiens dans les premiers Siecles du Chriſtianiſme. Traduite de l'Anglois. 2 voll. 8.

les Chevaliers errans & le Genie familier, par Mad. la Comteſſe D**. 12.

Choix des Bons Mots, ou les Penſées des Gens d'Eſprit ſur toutes ſortes de ſujets. 8.

Cicéron, Lettres à ſes Amis & à Atticus traduites en François ſuivant l'Edition de *Gravius*, avec des Sommaires & des Notes ſur chaque Lettre. 7 voll. 12.

——— *Epiſtolæ ſelectæ cum Notis* Jo. Caſp. Schroderi. 8.

——— *Tuſculanarum Diſputationum. Lib. V. ex recenſione* Jo. Daviſii. *Accedunt emendationes* Ric. Bentleii. 8. *Cantab.*

Clarendon (Edward, Comte de) Hiſtoire de la Rebellion & des Guerres civiles d'Angleterre, depuis 1641. juſqu'au rétabliſſement de Charles II. 6 voll. 12.

Colomeſii (Pauli) *Opera Theologici, Critici & Hiſtorici argumenti. Cura* Jo. Alb. Fabricii. 4.

Commelini (J.) *Catalogus Plantarum indigenarum Hollandiæ*; & L. Bidloo *de Re Herbaria.* 12.

Conſeils & Maximes de Pilpay Philoſophe Indien ſur les divers états de la Vie. 8.

Conſiderations ſur la certitude & ſur la grandeur des recompenſes & des peines du Monde à venir. Traduites de l'Anglois. 8.

Contes (Nouveaux) à rire, & Avantures plaiſantes de ce tems, ou Recreations Françoiſes. 18.

Controverſiarum de Religione breviſſima Synopſis. 12.

les Coups imprevûs de l'Amour, du Hazard & de la Fortune. 12.

Cow-

Cowper (Gul.) *Glandularum nuper detectarum Descriptio.* Fig. *Lond.* 4.

Cramero (Matth.) il nuovo Parlamento, cioè, Dialoghetti Italiano Tedeschi. 8.

Criticon (Nouveau) ou les Foiblesses Françoises avec quelques Histoires divertissantes. 12.

Ctucii (Jac.) *Suada Delphica, sive Orationes LXVIII. varii argumenti.* 12.

Cypriani (Ern. Sal.) *Programmata. Accessit Dissertatio de Rebus subditiciis.* 8.

Cyrilli Hierosolymitani *Opera omnia, Grac. Lat. cum Notis* Th. Mill. *Fol.* Oxoniæ.

D.

DAle (Sam.) *Pharmacologia, seu manuductio ad materiam Medicam. Ed. II.* 2 *voll.* 12. Lond.

Danzii (J. A.) *Interpretis Hebræo-Chaldæi Synopsis.* 8.

——— *Paradigmata Nominum Simplicium ac Verborum integra.* 8. Traj.

Daumii (Christ.) *Epistola Philologica-critica.* 8.

Dekeni (Is.) *Observationes Poëticæ Veterum & Recentiorum Poëtarum exemplis illustratæ.* 8.

les Delices & les Galanteries de l'Isle de France. 12.

Description exacte des Os comprise en ces trois Traitez: I. Nouvelles Observations sur des Os, sur leurs Maladies, &c. par *J. Jos. Courtial.* II. L'Art de guerir les Maladies des Os. par *L. Petit.* III. Dissertation sur la nourriture des Os, par *L. Lemery.* 12.

Desselii (Val. Andr.) *Erotemata Juris Canonici cum Animadversionibus* G. Ad. Struvii. 8.

Deutschmanni (Jo.) *Antiquissima Theologia positiva primi Theologi Adami protoplasti.* 4.

——— *Biblicum Abelis Theologia Compendium.* 4.

——— *Synopsis Theologiæ Biblicæ.* 4.

Deylingii (L. Sal.) *Observationes Sacræ, & Oratio de ingenio Israëlitarum Ægyptiacorum.* 4.

Dictionaire de l'Orateur Franc. Lat. Allemand. sec. Ed. augmentée. 8.

E.

ELecta Rei Nummariæ *sive selecta Dissertationes de rarioribus Nummis antiquis tam Græcis quàm Latinis.* 4.

Eleutherii Petridophili *Contemplationes super inchoato nuper sed mox rupto universalis negotio.* 4.

Emeri, Recueil de Secrets & Curiositez. 12.

Eſpen (Bern. van) *Opuſcula varia ſive Juris Eccleſiaſtici Univerſi Pars IV.* Fol.

le Veritable Eſprit des Nouveaux Diſciples de S. Auguſtin, Lettres d'un Abbé Licentié de Sorbonne à un Vicaire General d'un Dioceſe des Païs-Bas. 8. 4 voll.

Eſprit, Fauſſeté des Vertus Humaines. N. Ed. 12.

Eſtrades (le Comte d') Ambaſſadeur de France auprès des Etats Generaux, Lettres, Memoires & Negociations depuis 1663. juſqu'à 1668. inclus. 5 voll.

F.

FAbricii (Franc.) *Oratio de Scholis Prophetarum.* 4.

Fabricii (Jo.) *Epiſtola ad pios & eruditos Britannos.* 4.

——— *Oſculum Theologiæ & Philologiæ ſeu futilium objectionum depulſio.* 4.

Fabricius (Jo. Alb.) *Supplementa & Obſervationes ad* G. J. Voſſium *de Hiſtoricis Græcis & Latinis.* 8.

Fabulæ antiquæ ex Phædro *deſumtæ. Accedunt* Romuli *fabulæ Æſopiæ ex MSS. depromtæ & adjectis Notis editæ à* Jo. Frid. Nilant. 12.

Fayi (Jac.) *Defenſio Religionis nec non Moſis & Gentis Judaïcæ contra* Tolandum. 8.

Ferrari, Grammaire Roiale, Françoiſe & Allemande. 8.

Fiſcher (Anſ.) *Vita interna cum Deo.* 12.

Flandre galante contenant les conquêtes amoureuſes de pluſieurs Officiers, & les avantures qui leur ſont arrivées. 12.

Florini (Jo. Matth.) *Exercitationum Hiſtorico-Philologicarum Faſciculus de Origine & Propagatione Linguæ Græcæ, & Vitis IV. Evangeliſtarum.* 4.

Franci (Jo.) *herba Alleluia botanicè conſiderata.* 12.

Franzii (Wolfg.) *Tractatus de Interpretatione S. Scripturarum.* 4.

Freind (Jo.) *Prælectiones Chymicæ.* 8. Lond.

du Freſny de la Riviere, Amuſemens ſerieux & comiques. N. Ed. 12.

G.

GArmanni (Chriſt. Frid.) *de Miraculis mortuorum Libri tres, Opus Phyſico-Medicum.* 4.

Gedicci (Sim.) *Defenſio Sexus Muliebris oppoſita futiliſſimæ Diſputationi, Mulieres non eſſe Homines.* 4.

Gerdeſii (H. Jo.) *de Enthuſiaſmo Schediaſma inaugurale, contra Fanaticos novaniquos propoſitum.* 4.

Geulinx (Arn.) *Ethica, cui acceſſit* Corn. Bontekoe *de paſ-*

passionibus anima cum gemina rerum serie per Jo. Flenderum. 12.

Goetzii (G. Henr.) *Elogia Germanorum quorumdam Theologorum.* 8.

——— *Elogia Philologorum quorumdam Hebræorum.* 8.

——— ——— *Præcocium quorumdam Eruditorum aliorumque Virorum Doctorum.* 8.

Gonet (Jo. Bapt.) *Manuale Thomistarum seu brevis Theologiæ cursus.* 8.

Gramaye (Jo. Bapt.) *Antiquitates Belgicæ, auctæ Antiquitatibus Bredanis. Accedunt* Nic. de Guise *Mons Hannoniæ*, Dav. Lindani *Teneramunda.* Fol.

Gravinæ (J. Vinc.) *Origines Juris Civilis.* 4.

Grimarest, Traité sur la Maniere d'écrire les Lettres, & sur le Ceremonial. 12.

Gronovii (Jac.) *Laudatio Burcheri de Volder.* 4.

Grotius (H.) *de veritate Religionis Christianæ ex recensione* Jo. Clerici. 8.

Gruhlmanni (Jo. Godof.) *Specimen Medicum de novo contra Oculorum caliginem remedio tanquam specifico, Herniaria seu Oculoria.* 4.

Guerre d'Italie ou Memoires du Comte D**. IV. Ed. augmentée des Evenemens de cette guerre. 12.

Gulielmini (Dom.) *Exercitatio de idearum vitiis, correctione & usu ad statuendam & inquirendam Morborum naturam, item Lud. Testus de novo saccharo Lactis.* 8.

H.

HAmbergeri (Georg. Alb.) *Fasciculus Dissertationum Physico-Mathematicarum.* 4.

Happelii (Justi Helffr.) *Institutio Linguæ Arabicæ.* 4.

Harduini (Jo.) *Opera selecta, tum quæ jampridem Parisiis edita nunc emendatiora & multò auctiora prodeunt, tum quæ nunc primùm edita.* Fol.

Harpprechti (Jo.) *Commentarius in IV. Libros Institutionum Juris Civilis. Ed. III. auctior.* Fol. 4 vol.

Hartmanni (Jo. Phil.) *Capitula Patrum, seu Ethica Hebræa versione Latina, Annotationibus, &c. illustrata.* 4.

Heeser (Jo.) *Loci communes Juris Practici de Rationibus reddendis earumque revisione.* 4.

——— *de Bonorum, & imprimis ad quæstuum Conjugalium Communione, eorumque divisione.* 4.

Heineccii (Jo. Mich.) *Diatribe Genealogica de Domus Prussico-Brandeburgicæ ex stirpe Carolina originibus.* Fol.

——— *de Veteribus Germanorum aliarumque Nationum Sigillis, eorumque usu & præstantia Syntagma.* Fol.

Herlet (Jo. G.) *Catechiſmus prædicatus.* 8.

Hieroclis *aurea Carmina de providentia & fato quæ ſuperſunt, & reliqua Fragmenta Gr. Lat. ex recenſione & cum Notis* P. Needham. 8. *Cantab.*

Hildeberti *&* Marbodi *Opera, Labore & ſtudio* Ant. Beaugendre. *Fol.* Pariſ.

Hiſtoires galantes de diverſes Perſonnes qui ſe ſont rendues illuſtres par leur ſavoir ou par leur bravoure. 12.

——— Françoiſes, Galantes & comiques. 12.

Hiſtoire de la Princeſſe Eſtime. 12.

——— de la Vie & de la Mort des deux illuſtres Freres Corneille & Jean de Wit. 2 voll. 12.

Hodanni (Jo. Frid.) *Verſus Rhythmici ſive Leonini.* 8.

Homere, ſon Iliade & ſon Odyſſée traduites en François. 12.

Hoppii (Joach.) *Commentatio ad Inſt. Juſtinianeas. Ed. VI.* 4.

Horatius Flaccus *ab omni obſcœnitate Roma expurgatus.* 8.

I.

JArdin (Thom. du) *de Officio Sacerdotis, qua Judicis & Medici in Sacramento Pœnitentiæ inſtructio brevis.* 8.

S. Ignatii *Epiſtola genuina, Græc. Lat. cum annotat.* Jo. Pearſoni & Th. Smithi. *Accedunt Acta genuina Martyrii S. Ignatii, Epiſtola* Polycarpi *&c.* 4. Oxon.

Ignatio (Henr. à S.) *Ethica Amoris, ſive Theologia Sanctorum, Magni præſertim Auguſtini & Thomæ Aquinatis.* 2 voll. Fol.

Imhoff (Jac. Wilh.) *Genealogiæ viginti illuſtrium in Italia Familiarum.* Fol.

Introduction à la Vie devote de S. *François de Sales.* N. Ed. revûe par le P. *Brignon.* 8.

Itteri (Ant.) *Synopſis Philoſophiæ Rationalis & Moralis.* 12.

Juncken (Jo. Helffr.) *Lexicon Chymico-Pharmaceuticum. Ed. altera aucta.* 8.

——— *Nephrologia nova & curioſa.* 12.

K.

KEuchenii (Pet.) *Annotata in IV. Evang. & Acta Apoſt. Accedunt hactenus inedita ſcholia in cæteros N. Teſt. Libros.* 4.

Knoll (Jo.) *Vocabularium Biblicum* N. *Teſtamenti.* 8.

Krebſii (Jo. Aug.) *Elementa genuina Rhetorica ſive Oratoria.* 8.

Krimer (Ferd.) *Quæſtiones in V. Libros Decretalium.* 5 *voll.* Fol.

L.

LAncisii (Jo. Mariæ) *de subitaneis mortibus Libri duo.* 8.
Langii (Jo. Mich.) *Philologia Barbaro-Græca.* 4.
Langii (Joach.) *Medicina Mentis, sive ægra Mentis sanatio secundùm vera Philosophiæ principia.* 8.
——— *Antibarbarus Orthodoxiæ dogmatico-hermeneuticus, sive Systema Dogmatum Evangelicorum, adversùs Ph. Jac. Spenerum, aliosque.* 4.
Larrey (de) Réponse à l'Avis aux Refugiez. 12.
Larson (Val.) *Theatrum doloris J. C. pro hominibus patientis in sacrificio Missæ apertum.* 8. Fig.
Laselve (Zach.) *Annus Apostolicus continens Conciones pro omnibus totius anni diebus Dominicis, in Festa sanctorum, pro toto Adventu & tempore Quadragesimali.* 9 voll. 8.
Lelandi (Jo.) *Commentarius de Scriptoribus Britannicis, ex Autographo edidit* Ant. Hall. 2 *voll.* 8. Oxon.
Leopoldi (Dan.) *de variarum ætatum Eloquentia sacra ac Humana.* 12.
Lettres Choisies de Mrs. de l'Academie Fr. avec la Traduction des Fables de Faerne par M. *Perrault.* 8.
Libertas Argentoratensium stylo Rysvicensi non expuncta. 4.
Long (Jac. le) *Bibliotheca Sacra, seu Syllabus omnium fermè S. Scriptura Editionum ac versionum, Notis historicis & Criticis illustratus, cum additamentis* Christ. Frid. Boerneri. 8.
Longi (G.) *de Annulis Antiquorum signatoriis Tractatus.* 8.
Lotterius (Melch.) *de Re Beneficiaria.* Fol.
Lucien, de la Traduction de *N. Perrot d'Ablancourt.* N. Ed. 2 voll. 8.
Ludovici (God.) *Historia Rectorum, Gymnasiorum, Scholarumque celebriorum.* 8.
Lynkeri (Nic. Christ.) *Consilia seu Responsa.* Fol.

M.

MAii (Jo. Henr.) *Theologia Lutheri pura & sincera.* 4.
——— *Examen Historiæ Criticæ* Rich. Simonis *atque Artis Criticæ* Jo. Clerici *& Novi Speciminis Biblicarum Interpretationum* M. Meibomii. 4.
——— *Theologia Prophetica.* 4.
Manifeste du Roi Auguste, &c. sur son retour en Pologne en 1709. 12.
Manuductio Homiletico-practica in Evangelia Dominicalia. 8.
Maraccii (Hippol.) *Polyanthea Mariana. Ed. nova.* 4.

Marc-

Marckii (Jo.) *Exercitationes Scripturariæ in XXV. Loca V. T.* 4.

Marin (P.) Dictionaire François & Hollandois. 4.

Marolles (Louïs de) Discours sur la Providence. 12.

Martianay (le P.) Essais de Traduction, ou Remarques sur les Traductions Françoises du N. T. 12. *Paris.*

Mead (Rich.) *de Imperio Solis ac Lunæ in corpora humana, & morbis inde oriundis.* 8. Lond.

Meisneri (Balth.) *Doctrina orthodoxa de Sacramentis V. & N. T.* 4.

Melchioris (Jo.) *Fundamenta Theologiæ didascalicæ.* 12.

Memoires de Jean de Wit grand Pensionaire de Hollande. 12.

Menandri & Philemonis *Reliquiæ, Gr. Lat. cum* Notis Hug. Grotii & Jo. Clerici 8.

Minucii Felicis *Octavius cum integris* Wouveri, Elmenhorstii, Heraldi & Rigaltii *Notis aliorumque ex recensione* Jac. Gronovii; *qui emendationes & explicationes suas adjicit.* 8.

Mosis Filii Maimon *Tract. de Juribus Anni Septimi & Jubilæi cum Textu Hebræo, versione Latina & Notis* Jo. Henr. Maii. 4.

Musantii (Jo. Dom.) *Fax Chronologica ad omnigenam Historiam Sac. & Prof. accensa.* 12.

Musgrave (Guil.) *de Arthritide Anomala sive interna.* 8. Oxoniæ.

Musitanus (Car.) *de Morbis Mulierum.* 4.

N.

NAudé (Phil.) Recueil des Objections qui ont été faites contre le Traité de la Souveraine perfection, avec les Réponses. 12.

Nenter (G. Phil.) *Specimina Commentarii in* Dan. Ludovici *Pharmaciam moderno seculo adplicandam.* 4.

Nepotis (Cornelii) *excellentium Imperatorum Vitæ. Accessit Aristomenis Messenici vita ex Pausania.* 8. Oxon.

Noble (le) Ecole du Monde, ou Instruction d'un Pere à un Fils; touchant la maniere dont il faut vivre dans le Monde. 6 voll. 12.

——— Ecole du Monde nouvelle, ou les Promenades. 2 voll.

——— Degoût du Monde par Maximes tirées de l'Ecriture & des Peres. 18.

——— Avantures galantes, N. Ed. augmentée des Nouvelles Africaines du même Auteur. 12.

Noodt (Ger.) *de Forma emendandi Dolo malo in contrahendis nego-*

negotiis admissi apud Veteres. 4.

——— *Julius Paulus, sive de partus expositione & nece apud Veteres. Ed. sec. auctior.* 4.

Norisii (Henr.) S. R. E. Card. *Paraenesis ad V. C. Harduinum: Accessit ejusdem Thraso seu Miles Macedonicus Plautino sale perfrictus.* 8.

O.

OCtavii Mariæ à S. Josepho 310 *Dubia explanata* 8.

Odelem (Jo. Phil.) *Expositio Panegyrica Numismatis argentei in memoriam Duc. Palatii Salzdahlensis confecti Historico-Politica.* 4.

Os. Divers Traitez sur les Os. Voyez *Description.*

Oweni (Jo.) *Epigrammata. Ed. nova ab omni obscœnitate repurgata.* 12.

P.

PAgenstecher (Al. Arn.) *de Jure Virginum & Virginis Florentinæ Ecloga.* 12.

Palatium Eloquentiæ à RR. PP. Soc. J. exstructum. 4.

Panger (Marini) *Quæstiones controversa circa Articulos Fidei inter Catholicos & Acatholicos.* 8.

Peckii (Gottl. Frid.) *Græca Lingua Liber Memorialis.* 8.

Perizonii (Jac.) *Æther Britannis & Batavis militans, sive Oratio Panegyrica de Rebus gestis & victoriis anno 1708. in Belgica partis.* 4.

——— *Commentarii Historici à Sæc. XVI. usque ad Caroli V. mortem.* 8.

Petri (Franc.) *Suevia Ecclesiastica.* Fol.

Petronii *Satiricon quæ supersunt cum integris Doctorum Virorum Commentariis & Notis* Nic. Heinsii & Gul. Goesii *nunc primum editis, curante* P. Burmanno. 4.

——— Idem Lat. & François. Nouv. Ed. augmentée de la Contre-Critique de Petrone. 2 voll. 12.

Pfaffii (Christ. Matth.) *Dissertatio de Genuinis Librorum N. T. Lectionibus & de Testamento Græce à* Jo. Millio *edito.* 8.

Phædri *Fabulæ notis & explicationibus illustratæ, à* Th. Johnson. 8. *Lond.*

Pharmacopœa Batheana. Editio nova. 8.

Philostratorum *quæ supersunt omnia, recensuit notis perpetuis illustravit, versionem totam ferè novam fecit* Gottf. Olearius. *Fol.*

Pisart (Henr.) *Sacerdos Evangelicus ad Sancta Sanctorum accinctus, sive Paraphrases & observationes in Regulas & Leges*

Digitized by Google

ges Pontificias, Sacrificii nova Legis directrices. 8.

Politique du Papiſme en Angleterre avec les moyens d'en arrêter le progrès. 8.

Pomey (le P.) le Grand Dictionaire Royal, Franc. Lat. Allemand. IV. Ed. 4.

Port Royal, (Mrs. de) Abregé de la Nouvelle Methode pour apprendre facilement la Langue Latine. 8.

——— Epîtres de S. Paul traduites en François, avec l'explication du ſens litteral & du ſens ſpirituel. 4 voll. 12.

Propylæum ſapientis & felicis Principis neceſſaria quædam de Arte Regnandi, maximè de Aulicorum prudentia axiomata pandens. 12.

Q.

QUilleti *Callipædia, ſeu de pulcra Prolis habenda ratione Poëma, cum uno & altero ejuſdem Auctoris carmine.* 8.

R.

RAcine, ſes Oeuvres, N. Ed. ſur celle de Paris, augmentée de quelques Ouvrages. 2 voll. 12.

Ranchini (Steph.) *Miſcellanea Deciſionum ſeu Reſolutionum Juris Civilis & Canonici.* Fol.

Raphelii (Georg.) *Annotationes Philologica in N. T. ex Xenophonte collecta, cum additamento in V. T. Acceſſit Præfatio* Jo. Fechtii. 8.

Rechenberg (Ad.) *Fundamenta vera Religionis adverſus Atheos, Deiſtas & profanos homines aſſerta.* 12.

Recueil des Harangues prononcées par Mrs. de l'Academie Fr. depuis leur Etabliſſement juſqu'à preſent. 2 voll. 12.

Reflexions ſur l'état de l'Europe, avec la Réponſe à ces Reflexions. 12.

Regii (Jo.) *Oratio de ſapientia imaginaria.* 4.

Regnier, ſes Satires & autres Pieces de Poëſie. N. Ed. 12.

Regnier Deſmarais, Hiſtoire des Demêlez de la Cour de France avec la Cour de Rome au ſujet de l'affaire des Corſes. 4. *Paris.*

Reineccii (Chriſt.) *Concordia Germanico-Latina.* 4.

Reinking (Theod.) *Tractatus de Retractu conſanguinitatis. Acceſſit ejuſdem Auctoris Reſponſum Juris de proceſſu contra Sagas & Maleficos.* 4.

Reinzer (Franc.) *Meteorologia Philoſophico-Politica ſymbolis illuſtrata.* Fol.

Re-

Relandi (Hadr.) *Oratio de Galli cantu Hieroſolymis audito.* 8.

——— *de Nummis Veterum Hebræorum qui Samaritani appellantur Diſſertationes V. Accedit Diſſertatio de Marmoribus Arabicis Puteolanis.* 8.

Ricaut, Hiſtoire de l'Egliſe Greque & Armenienne. Traduite de l'Anglois par M. *de Roſemond.* 12.

Richardi (Barth. Chriſt.) *Commentatio de vita & ſcriptis Profeſſorum in Acad. Jenenſi hodie publicè docentium.* 8.

Riedlini (Viti) *Curarum Medicarum millenarius.* 4.

Rollii (Reinh. Henr.) *Bibliotheca Nobilium Theologorum Hiſtorico-Theologica ſelecta.* 8.

Roo (Ger. de) *Annales rerum ab Auſtriacis Habsburgica Gentis Principibus à Rudolpho I. uſque ad Carolum V. geſtarum.* 4.

Roſſel (Jo. Georg.) *de Ordine & Privilegiis Creditorum in Auctionibus & Subhaſtationibus.* 4.

S.

SAutel (P. Juſt.) *Diva Magdalena ignes ſacri & pia Lacrimæ.* 18.

Schaaf (Car.) *Lexicon Syriacum Concordantiale omnes voces N. T. Syriaci complectens.* 4.

Schefferi (Jo.) *de Antiquorum Torquibus Syntagma cum Notis* Jo. Nicolaï. 8.

Schelhameri (Gunth. Chriſt.) *De Nitro cum Veterum tum noſtro Commentatio.* 8.

——— *Via regia ad Artem medendi præceptis & exemplis munita.* 4.

Schramm (Jo. Maur.) *De Vita & ſcripti famoſi Athei* Jul. Cæſ. Vanini *Tractatus.* 4.

Schranger (Tim.) *Morale & extemporaneum ſacri Eloquii ſubſidium ad ſingulas totius anni Dominicas & Feſta, nec non Ferias quadrageſimales.* 4.

Schultens (Alb.) *Animadverſiones Philologica & Critica ad varia Loca V. T.* 8.

Schurzfleiſchii (Jo.) *Diſſertationes varii argumenti.* 8.

Schutzen (Jo.) *Apparatus curioſus continens ratas Obſervationes Theol. Philol. Hiſt. & Philoſophicas*, &c. 4.

Secretaire de ce temps avec un Bouquet de Poëſies ingenieuſes. Franc. Allemand. 12.

Segneri (Pauli) *Devotus Mariæ Virginis.* 18.

Serry (Jac. Hyac.) *Hiſtoria Congregationum de Auxiliis divinæ Gratiæ adverſus Eleutherii Pſeudo-Hiſtoriam.* Fol.

Simon (Rich.) Bibliotheque Critique, ou Recueil de diverſes

verſes Pieces Critiques. 2 Tom. 12.) *Les Tomes, III. & IV. ont paru en* 1710.)

Sklerandri (Phil. Jac.) *Hiſtoria Antiquitatum Eccleſia Chriſtianæ.* 4.

Sonntagii (Chriſt.) *Decas Decalogica, h. e. decem δείγματα Commentationum ſuper Moralitate Legum ceremonialium & Forenſium.* 4.

Sophoclis *Tragœdia Ajax & Electra Gr. Lat. nova verſione donatæ ſcholiſque illuſtratæ, accedunt Notæ perpetuæ & variæ Lectiones, opera* Th. Johnſon. 8. *Oxon.*

Speneri (Phil. Jac.) *Conſilia & Judicia Theologica Latina.* 3 voll. 4.

Spies (Placidi) *Sacrarum Meditationum Alvear.* 8.

Spoor (Henr.) *Faviſſæ utriuſque Antiquitatis tam Romanæ quam Græcæ, cum Iconibus virorum illuſtrium.* 4.

Stockher (Pauli) *Sapientia Politica Symbolica, h. e. virtutes & Symbola Cæſarum Auſtriacorum Emblematis & Theſibus explicata.* Fol.

Stockii (Chriſt.) *Interpres Græcus.* 8.

G. Ad. Struvii *Syntagma Juriſprudentiæ ſecundum ordinem Pandectarum. Ed. N.* 4.

Struvii (Burch. Gotth.) *Theſaurus variæ eruditionis ex Scriptoribus potiſſimum ſæc. XVI. & XVII. collectus.* 4.

Sturm (Leon. Chriſt.) le Veritable Vauban au lieu du Faux Vauban qui a couru juſqu'ici par le Monde. 8. fig.

Sulpicii Severi *Hiſtoria Sacra cum Notis* Druſii & Vorſtii, *accurante* Jo. Caſp. Hofmeiſtero. 8.

——— *Opera omnia cum Notis* Jo. Vorſtii & Jo. Clerici. 8.

T.

TErcinier (Pet.) *Palladium Libertatis Europæ, Cuſtos Poëtica.* 8.

Terentius *in uſum Delphini.* 8. Lond.

N. Teſtamentum Græcum ex recenſione T. Bezæ, *cum ſummariis Capitum.* 12.

——— Idem *Græco-Latinum, interprete* Th. Beza. 12.

——— *Syriacum cum verſione Latina; Cura & Studio* Jo. Leuſden & Car. Schaaf. 4.

Theſaurus ſecretorum curioſorum ad omnes Humani Corporis Morbos curandos. 4.

Tillemont (Le Nain de) Hiſtoire des Empereurs & des autres Princes qui ont regné durant les 6 premiers Siecles de l'Egliſe. Tome IV. en 2 voll. 12.

Tillotſon, Archevêque de Cantorbery, Sermons ſur di-

ver-

verſes Matieres importantes, traduits de l'Anglois par Mr. *Barbeyrac.* 8. Tom. III. (*Le Tome IV. a paru en* 1710.)

Toland (Jo.) *Oratio Philippica ad excitandos contra Galliam Britannos* Matthæi *Card. Sedunenſis, luce, Diatribâ Præliminari & Notis donata.* 8.

Tornovii (Pet.) *Tractatus de Feudis Meclenburgicis, eorumque jure.* 4.

Trabouillet (L.) Etat de la France. 3 voll. *Paris.*

Traité de la Peinture en Mignature, pour aprendre aiſément la Peinture ſans Maître. 12.

Tremblai (Frain du) Traité des Langues, ou du Merite & de l'Excellence de chaque Langue & en particulier de la Langue Françoiſe. 12.

Truchement curieux pour les Voyageurs, en François & en Allemand. 8.

Turſellinus (Hor.) *de particulis Latinæ Orationis, recognitus à* Jac. Thomaſio *& perpolitus ac collupletatus à* Jo. Conr. Schwartz. 8.

V.

Valentini (Mich. Bernh.) *Armamentarium Naturæ Syſtematitum. Accedit Hiſtoria Litteraria S. R. I. Academiæ Naturæ Curioſorum.* 4.

Vavaſſoris (Franc.) *Opera omnia Theologica & Philologica, edita & inedita, cum Latina, tum Gallica.* Fol.

Vauban, Nouvelle Maniere de fortifier les Places ſelon ſa Methode. 12.

Velleii Paterculi *Hiſtoria Romana cum Notis Grammaticis, accurante* Chriſtoph. Juncker. 8.

Veneroni, le Maître Italien dans ſa perfection. N. Ed. 8.

Vera (Don Antonio de) Parfait Ambaſſadeur, nouvellement traduit en François. 8.

Vocabulaire François-Allemand. 12.

Voigtii (Gothfr.) *Thyſiaſteriologia, ſive de Altaribus Veterum Chriſtianorum Liber Poſthumus editus à* Jo. Alb. Fabricio. 8.

W.

Weimari (Dan) *Uſus accentationis Biblicæ per XXV. Loca V. T. luculenter oſtenſus.* 4.

Wepferi (Jo. Jac.) *Hiſtoria Apoplecticorum, & Exercitatio de loco Apoplexia affecto.* 8.

Weſtenbergii (Ern. Wilh.) *Viridarii Academiæ Harderovicenæ Herbarum ac uſualium Plantarum Catalogus.* 12.

White

White (Jo.) *Dissertationes Philologica de Linguis tradendis.* 4.

Wigand (Frid. von) *Fata rerum circa finem saeculi XVII. & initium saeculi praesentis.* 12.

Z.

ZAhn (Godfr. Andr.) *Dissertatio de Origine, Pregressu & Dignitate Medicinæ.* 12.

Zahnii (Balth. Conr.) *Ichnographia municipalis, sive Tractatus de Jurisdictione & Jure municipiorum Juridico-Politicus.* 4.

Zierholdi (Jo. Wilh.) *Veri Nominis Orthodoxia Fidelium & piorum per exegesin Epistolæ I. ad Timotheum.* 8.

VA1 1541728